RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 aprile 1906.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali.* Nota del Corrispondente Cesare Arzelà.

1. Per un'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dove x e y sono variabili reali in un certo campo, è dimostrato che, presupposta la continuità della $f(x, y)$, o anche solo la integrabilità in x e la continuità in y, preso ivi a piacere un punto $(x_0\, y_0)$, sempre esiste almeno una funzione continua $y = y(x)$ che per $x = x_0$ assume il valore $y = y_0$ e soddisfa, per un certo intervallo, all'equazione differenziale. Se si aggiunge la condizione di Cauchy, o quella di Lipschitz, quella funzione è unica.

Se poi $f(x, y)$ è funzione analitica delle x e y variabili complesse, allora un procedimento ben noto, fondato sul cosidetto *Calcolo dei limiti* di Cauchy, assicura l'esistenza di una funzione analitica $y(x)$ della x che in $x = x_0$ diviene $y(x_0) = y_0$, e soddisfa all'equazione differenziale.

Per un'equazione a derivate parziali

$$p = f(x, y, z, q),$$

l'esistenza dell'integrale è stabilita nell'ipotesi che il secondo membro sia funzione analitica degli argomenti x, y, z, q, con dimostrazione pure fondata

sul *Calcolo dei limiti*: ma, come nota E. von Weber [1], un teorema *generale* di esistenza, nel dominio delle quantità reali, analogo a quello ricordato qui a principio, ancora non è stato dato.

In una Nota *Sull'esistenza degli integrali* ecc. (Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna, 1896), come anche nell'altra 1895 *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie*, dimostravo per queste l'esistenza della soluzione servendomi del teorema generale relativo alla *condizione per l'esistenza di una funzione limite continua per una successione di funzioni qualunque, comprese tra limiti finiti*; e annunciavo che, seguendo via analoga, mi ripromettevo di pervenire a un analogo teorema di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali.

Ma la cosa non mi riuscì, e così, anche più tardi dovetti pur rimandare la pubblicazione della Memoria relativa, annunciata nei Rendiconti del 1903 dell'Accademia di Bologna.

Ora giudico di avere ottenuto in modo semplice mediante opportuna costruzione di una successione di funzioni discontinue, la dimostrazione di che si tratta, e nella Memoria, di cui qui si espone il sunto, precisamente stabilisco che:

Presupposta nella funzione $f(x, y, z, q)$ *la sola continuità rispetto alle variabili in un certo dominio, data ad arbitrio una funzione* $\varphi_0(y)$ *della* y *continua essa e la sua derivata* $\varphi_0'(y)$ *in un certo intervallo e con rapporto incrementale* $\dfrac{\varphi_0'(y+k) - \varphi_0'(y)}{k}$ *sempre compreso tra* $-\mathrm{L}$ *e* L, L *finito, l'equazione*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ammette sempre una, o infinite soluzioni, $z = z(x, y)$ *finite e continue insieme con le rispettive derivate* $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ *in un certo campo, e che per* $x = x_0$ *si riducono* $z(x_0, y) = \varphi_0(y)$.

Questo lavoro è da riguardarsi come un'applicazione del teorema generale relativo alla convergenza verso funzioni limiti continue, di una successione, o di una varietà di funzioni discontinue solo supposte comprese tra limiti finiti.

Darò in altra Nota condizioni semplici per la unicità della soluzione.

2. Ecco i teoremi sui quali si fonda la dimostrazione.

1°. *Data una varietà* G *di funzioni, delle quali è solamente presupposto che siano tutte contenute tra limiti finiti, la condizione necessaria*

[1] *Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften* ecc. II Band, Heft 2, 3.

e sufficiente affinchè essa ammetta una o più, o anche infinite funzioni limiti egualmente continue, è, che si possa assegnare una successione di numeri

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots$$

positivi, decrescenti indefinitamente, e insieme anche un'altra successione di numeri pure positivi.

$$\delta_1 , \delta_2 , \ldots$$

tali che nella varietà G *si trovino infinite sotto-varietà, che indicheremo con*

$$G(\sigma_1) , G(\sigma_2) , \ldots$$

ognuna di infinite funzioni e contenuta in quella che la precede, egualmente oscillanti, rispettivamente per meno di

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots$$

in ogni cerchio, di raggio

$$\delta_1 , \delta_2 , \ldots$$

rispettivamente.

2°. *Se la varietà* G *si riduce a una successione ordinata*

$$u_1(x , y) , u_2(x , y) , \ldots$$

la condizione sarà verificata se per ogni σ, *esiste un intero* m *e un numero positivo* δ *tale che in ogni area di massima corda* δ, *oscillino per meno di* σ *tutte le*

$$u_{m+1}(x , y) , u_{m+2}(x , y) , \ldots$$

3°. *Se le successioni*

$$u_1(x , y) , u_2(x , y) , \ldots$$
$$v_1(x , y) , v_2(x , y) , \ldots$$

convergono rispettivamente in egual grado alle funzioni continue $u(x , y)$ *e* $v(x , y)$ *e in ogni cerchio comunque piccolo e per ogni intero* m, *si trova sempre per qualche indice* $n > m$ *un punto* (x , y) *nel quale è*

$$u_n(x , y) = v_n(x , y) ,$$

sarà in ogni punto del campo

$$u(x , y) = v(x , y) .$$

3. È data l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x , y , z , \frac{\partial z}{\partial y}\right) ,$$

ovvero

$$p = f(x , y , z , q) .$$

La $f(x, y, z, q)$ è supposta funzione continua nelle variabili x, y, z, q nel dominio limitato dalle disuguaglianze

$$x_0 \leq x \leq X_0$$
$$y_0 \leq y \leq Y_0$$
$$-Z_0 \leq z \leq Z_0$$
$$-Q_0 \leq q \leq Q_0 .$$

È data la $x = x_0 , z = \varphi_0(y)$ continua essa e la sua derivata prima $\varphi'(y)$ nell'intervallo

$$y_0 \leq y \leq Y_0$$

e con $\left|\frac{\varphi'(y+h) - \varphi'(y)}{h}\right|$, sempre minore di L, per ogni y e $y+h$ ivi.

Deve essere ancora

$$-M < \varphi_0(y) < M$$
$$-M' < \varphi_0'(y) < M'$$

con M e M' rispettivamente minori di Z_0 e di Q_0.

Si costruisca una successione di funzioni

$$\varphi_0(y) , \varphi_1(y) , \varphi_2(y) , \ldots$$

continue esse e le rispettive derivate

$$\varphi_0'(y) , \varphi_0'(y) , \varphi_2'(y) , \ldots$$

nell'intervallo $y_0 \ldots Y_0$ e i cui rapporti incrementali

$$\frac{\varphi_s'(y+h) - \varphi_s'(y)}{h}$$

siano pur sempre compresi tra $-L$ e L.

Le

$$\varphi_0(y) , \varphi_1(y) , \varphi_2(y) , \ldots$$

siano tutte comprese tra

$$-M_1 \text{ e } M_1$$

essendo

$$M \leq M_1 < Z_0 ;$$

le

$$\varphi_0'(y) , \varphi_1'(y) , \varphi_2'(y) , \ldots$$

comprese tra

$$-M_1' \text{ e } M_1'$$

con

$$M' \leq M_1' < Q_0 .$$

Le $Z_0 - M_1$ e $Q_0 - M_1'$ saranno così maggiori di una determinata quantità maggiore di zero.

4. Consideriamo poi l'altra successione

$$\varphi_0(y)\,,\ \varphi_0(y) + (x_1 - x_0)\,\varphi_1(y)\,,\ \varphi_0(y) + (x_1 - x_0)\,\varphi_1(y) + (x_2 - x_1)\,\varphi_2(y)\,,\ldots$$

che indicheremo con

$$\varphi_0(y)\,,\ \psi_1(y)\,,\ \psi_2(y)\,,\ldots$$

Queste saranno contenute dentro i limiti $-Z_0$ e Z_0 e le rispettive derivate dentro i limiti $-Q_0$ e Q_0, se si prenderà $X_0 - x_0$ al più eguale al minore dei due numeri

$$\frac{Z_0 - M}{Z_0}\,,\ \frac{Q_0 - M'}{Q_0}\,.$$

I rapporti incrementali delle $\psi_s'(y)$ saranno sempre compresi tra

$$-L(1 + X_0 - x_0) \text{ e } L(1 + X_0 - x_0),$$

dove $X_0 - x_0$ ha il valore ora detto, e con ciò le $\psi_s'(y)$ saranno tutte egualmente continue.

Mediante rette

$$x = x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n$$
$$y = y_0\,,\ y_1\,,\ y_2\,,\ldots y_m$$

si divida il campo delle $(x\,,y)$ in mn rettangoli. Si consideri la striscia tra la $x = x_0$ e la $x = x_1$.

Sopra la curva iniziale $x = x_0\,,\ z = \varphi_0(y)$ si segnino i punti le cui coordinate sono

$$x_0\,,\ y_0\,,\ z_{0,0} = \varphi_0(y_0)$$
$$x_0\,,\ y_1\,,\ z_{0,1} = \varphi_0(y_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_0\,,\ y_{m-1}\,,\ z_{0,m-1} = \varphi_0(y_{m-1})$$

e si immaginino i piani

$$Z - \varphi_0(y_0) = (X - x_0)\,p_{0,0} + (Y - y_0)\,q_{0,0}$$
$$Z - \varphi_0(y_1) = (X - x_0)\,p_{0,1} + (Y - y_0)\,q_{0,1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z - \varphi_0(y_{m-1}) = (X - x_0)\,p_{0,m-1} + (Y - y_0)\,q_{0,m-1}$$

dove è

$$q_{0,0} = \varphi_0'(y_0)\,,\ q_{0,1} = \varphi_0'(y_1)\,,\ldots\ \varphi_{0,m-1} = \varphi_0'(y_{m-1})$$
$$p_{0,0} = f(x_0\,y_0\,,\varphi_0(y_0)\,,\varphi_0'(y_0))\,,\ldots\ p_{0,m-1} = f(x_0\,,y_{m-1}\,,\varphi_0(y_{m-1})\,\varphi_0'(y_{m-1})$$

e sopra ciascuno di questi piani si consideri il rettangolo che ha per proiezione nel piano (x, y) il rettangolo avente per vertice inferiore sulla $x = x_0$, il punto (x_0, y_0), o il punto $(x_0\, y_1), \ldots$ o il punto $(x_0\, y_{m-1})$ rispetivamente.

Si costruisce a questo modo una superficie composta di m rettangoli giacenti in piani tangenti alla curva iniziale nei varî punti dianzi segnati: superficie in generale discontinua nel passaggio da un piano all'altro. Essa, quando si consideri come sua ordinata z quella che corrisponde al lato inferiore $y =$ cost dei rettangoli che la costituiscono, ammette sempre la derivata a destra in x, e ammette anche quella in y superiore.

Inoltre se con $\Sigma_{m,n}$, $D_x^+ \Sigma_{m,n}$, $D_y^+ \Sigma_{m,n}$ si indicano la funzione costruita e le derivate a destra rispettive in x e in y, si ha verificata l'equazione

$$D_x^+ \Sigma_{m,n} = f(x, y, \Sigma_{m,n}\, D_y^+ \Sigma_{m,n})$$

in ogni vertice inferiore sinistro.

Si consideri poscia la striscia fra le rette $x = x_1$, $x = x_2$: assumendo qui la curva $x = x_1$, $z = \psi_1(y)$ come curva iniziale e operando come dianzi, si costruisce una seconda superficie avente per proiezione nel piano (x, y), quella striscia.

Si prosegua analogamente colla $x = x_2$, $z = \psi_2(y)$, ecc.

Sopra il dominio

$$x_0 \leq x \leq X_0$$
$$y_0 \leq y \leq Y_0$$

si avrà costruita una superficie discontinua, a derivate in x e in y a destra pure discontinue e che verifica l'equazione proposta in ogni vertice inferiore sinistro degli mn rettangoli, in cui è decomposto il dominio anzidetto [1].

Si determini l'oscillazione rispettiva delle

$$\Sigma_{m,n}, \quad D_x^+ \Sigma_{m,n}, \quad D_y^+ \varepsilon_{m,n}$$

in una parte c del campo; si vede che considerando ad es. le successioni

$$\Sigma_{2,2}, \Sigma_{4,4}, \Sigma_{8,8}, \ldots$$

$$D_x^+ \Sigma_{2,2}, D_x^+ \Sigma_{4,4}, \ldots$$

$$D_y^+ \Sigma_{2,2}, D_y^+ \Sigma_{4,4}, \ldots$$

è, per ognuna, sodisfatta la condizione della proposizione 2ª del § 2.

Esiste dunque, per ognuna, una funzione limite continua, a cui essa, o una successione estratta da essa, converge in eguale grado.

Siano

$$\Sigma_0(x, y), \quad \Sigma_0^{(x)}(x, y), \quad \Sigma_0^{(y)}(x, y)$$

queste funzioni limiti continue.

[1] Sulle rette $x = x_s$ si considererà come valore z della $\Sigma_{m,n}$ quello che corrisponde al lato sinistro dei singoli rettangoli formanti la $\Sigma_{m,n}$: sulle $y = Y_r$, il z corrispondente al lato inferiore: eccettuate le $x = X_0$, $y = Y_0$.

Le $\Sigma_0^x(x, y)$, $\Sigma_0^y(x, y)$ sono, per note proposizioni, le derivate continue in x e in y della $\Sigma_0(x, y)$; inoltre per la proposizione 3ª (§ 2), è in ogni punto (x, y)

$$\frac{\partial \Sigma_0(x, y)}{\partial x} = f\left(x, y, \Sigma_0(x, y), \frac{\partial \Sigma_0(x, y)}{\partial y}\right).$$

Così rimane provato, quanto ci eravamo proposto.

Di funzioni, come la $\Sigma_0(x, y)$, ve ne possono essere più di una; anzi, se ve ne sono due, ve ne sono sicuramente infinite.

Vedremo poi la condizione qer l'unicità.

Geologia. — *Sull'esistenza dell'Eocene nella Penisola Salentina.* Nota del Corrispondente G. Di-Stefano.

L'esistenza dell'Eocene in provincia di Lecce è stata indicata dal professor C. De Giorgi in vari lavori (1) e dalle carte dell'Ufficio geologico. Questa formazione, una volta creduta discretamente estesa, fu poi nella Carta ristretta in minori confini; infatti su quella al 100000, pubblicata nel 1904 dal sovraddetto Ufficio, si trova segnata sui fogli 214, 215 e 213 solo dalla Punta Macurune fin presso Vitigliano; nei dintorni del Capo di Otranto, cioè dalla Masseria La Caprara fino al nord della regione Torre Specchia la Guardia; dal Porto di Castro fin presso quello di Tricase e dal sud di Gagliano del Capo fino al Faro di S. Maria di Leuca. Però nel 1903 il De Giorgi (2) si ricredette, scrivendo che le sue precedenti affermazioni sull'esistenza dell'Eocene in Terra d'Otranto erano solo fondate sul carattere litologico.

L'anno scorso il dott. G. Dainelli, che nelle sue escursioni del 1900 (3) non aveva trovato nummuliti nella parte meridionale del Capo di Leuca, facendo suo pro' di un interrogativo messo sulla Carta dell'Ufficio geologico per un eccesso di scrupolo, quando il materiale raccolto non era ancora studiato, negò (4) l'esistenza dell'Eocene nella regione litorale al Sud di Gagliano; anzi, fondandosi sul ritrovamento di alcune rudiste fatto dal sig. E. Bercigli al castello di Castro, si credette autorizzato di poter conchiudere troppo presto con le seguenti parole: *Ed ultima conseguenza infine si è la lecita suppo-*

(1) De Giorgi C., *Note geologiche sulla provincia di Lecce*, 1876; *Note statigrafiche e geologiche da Fasano a Otranto*. Bull. d. Com. geol., 1881; *Cenni di geografia fisica della provincia di Lecce*, 1884; *Geografia fisica e descrittiva della prov. di Lecce*, 1897.

(2) De Giorgi C., *Serie geologica dei terreni nella Penisola Salentina*. Mem. d. pont. Acc. d. Nuovi Lincei, XX, 1903.

(3) Dainelli G., *Appunti geologici sulla parte meridionale del Capo di Leuca*. Boll. d. Soc. geol. ital., XX, 1901.

(4) Dainelli G., *Vaccinites* (*Pironaea*) *polystylus* Pirona *nel Cretaceo del Capo di Leuca*. Boll. d. Soc. geol. ital., XXIV, 1905.

sizione che anche i lembi ad Orbitoides di Tricase (da me citato come eocenico sulla fede del De Giorgi) e di Otranto appartengano, come gli altri di Gagliano e di Castro, al Dordoniano, anzichè all'Eocene e che il Nummulitico non si debba trovare nelle colline di Puglia a mezzogiorno del Gargano. Così, secondo il Dainelli, l'Eocene dovrebbe scancellarsi dalle carte geologiche della Penisola Salentina.

La presente Nota è scritta per dimostrare che questo sarebbe un errore, e non perchè il Dainelli mi abbia tratto nella controversia per via di una conversazione che egli ebbe con me parecchi anni fa, nella quale esattamente affermai che nella regione del Capo di Leuca ci sono dei calcari con nummuliti macroscopiche. Finora non ho avuto modo di tornare ad occuparmi di quella importante questione, tanto più che il materiale raccolto dall'ing. L. Baldacci, dall'aiutante-ingegnere sig. M. Cassetti e in parte da me stesso, non era più a mia disposizione. Avendolo potuto ora studiare, grazie alla cortesia dei capi dell'Ufficio geologico, mi trovo in condizioni di poter riconfermare l'esistenza dell'Eocene nella provincia di Lecce.

Il materiale da me esaminato porta, nei vari esemplari, le seguenti indicazioni di provenienza: Regione a S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano — Presso la Torre del Mito, sotto il Miocene, tra il Porto di Tricase e quello di Castro — Masseria La Pezza presso Porto Badisco (a S-O. del Capo d'Otranto) — Torre S. Emiliano (a S-O. del Capo d'Otranto) — Masseria La Caprara (a N-O. del Capo d'Otranto).

Si tratta di molti pezzi di calcare bianco, biancastro, in qualche caso tendente al gialliccio, per lo più tenace, ma non di raro grossolano e facilmente disgregabile. Tra l'un tipo e l'altro avvengono dei passaggi. I campioni di calcare raccolti a S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano, sono spesso a grana fina e molto tenaci. Frequentemente questi non fanno osservare fossili; ma pure ce ne sono nei quali si vedono vari esemplari macroscopici di nummuliti, assiline ed alveoline, appartenenti a poche specie. In quelli raccolti presso la Torre del Mito, tra Castro e Tricase, vi è un maggior numero di foraminiferi macroscopici e molti microscopici. Vi si osservano a occhio nudo nummuliti, belle opercoline, ortofragmine e lepidocicline, tutte indubbiamente associate. Questi generi abbondano nei calcari a N.O e a S.O del Capo d'Otranto. La lista di foraminiferi che riporto qui appresso mi pare abbastanza dimostrativa:

Alveolina elongata d'Orb. — A S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano.

Operculina granulosa Leym. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria la Pezza; Torre S. Emiliano; Masseria La Caprara.

Operculina ammonea Leym. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza; Masseria La Caprara.

Nummulites (*Camerina*) *Molli* Lmk. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza.

Nummulites (*Lenticulina*) *complanata* Lmk. (Un grosso frammento ben determinabile) — Fra Tricase e Castro.

Nummulites (*Lenticulina*) *Tchihatcheffi* d'Arch. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza.

Nummulites (*Lenticulina*) *Guettardi* d'Arch. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Torre S. Emiliano; Masseria La Caprara.

Nummulites (*Lenticulina*) *curvispira* Mgh. — A S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano.

Assilina exponens Sow. sp. — A S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano.

Orthophragmina stellata d'Arch. sp. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza.

Orthophragmina sp. — Masseria La Pezza.

Lepidocyclina sp. n. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza; Torre S. Emiliano; Masseria La Caprara.

Lepidocyclina sp. n. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza; Masseria La Caprara.

La fauna notata sopra è certamente eocenica; essa rappresenta il Luteziano de Lapparent (= Parisiano Mayer, non d'Orbigny).

Il Nummulitico dunque esiste nella Penisola Salentina e corrisponde litologicamente e paleontologicamente a quello del promontorio Gargano. Esso è rappresentato da ristretti lembi, che stanno sotto quella lumachella detta *Fragiuolo*, la cui età miocenica io *non supponevo*, ma conoscevo assai bene sin dal 1891, quando il Cassetti ne portò all'Ufficio Geologico i molti fossili.

La lista di foraminiferi dei calcari bianchi eocenici sarà certamente accresciuta, sia disgregando altri dei pezzi di calcare raccolti, che facendo ancora ricerche sui luoghi; del resto io non ho citato varie nummuliti che sembrano nuove. Ho riportato, sebbene corrispondano a specie indescritte, le *Lepidocyclina*, perchè la loro associazione con nummuliti eoceniche e con ortofragmine è importante. Questo fatto dimostra ancora una volta che il genere *Lepidocyclina*, rappresentato qui da molti e belli esemplari, non è caratteristico di strati più elevati dell'Eocene. Riconosco la necessità che i foraminiferi eocenici della prov. di Lecce siano illustrati, e questo sarà fatto o da me stesso, o da qualcuno degli assistenti al Museo geologico dell'Università di Palermo.

Le rudiste trovate dal sig. Bercigli al castello di Castro indicano, se sono in posto, che il lembo di Cretaceo superiore segnato sulla Carta dell'Ufficio geologico al nord della Punta Macurune, deve estendersi un po' più a Sud; ma da questo non potrà dedursene che il Nummulitico manchi del tutto nella Penisola Salentina, perchè il materiale da me studiato prova il contrario. Salvo qualche eventuale modificazione di limiti, i rilevatori della Carta geologica hanno fatto cosa esatta indicando l'Eocene in quella regione.

Chimica. — *Sopra gli azossicomposti.* Nota del Corrispondente A. Angeli e di G. Marchetti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota del prof. G. Lauricella, presentata dal Socio U. Dini.

In una Nota pubblicata negli *Annali di matematica* dello scorso anno, dimostrai l'esistenza degli integrali delle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ \Delta^2 v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \\ \Delta^2 w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

per dati spostamenti nei punti della superficie σ di un corpo elastico S e per $k > 0$. Una nuova dimostrazione è stata recentemente tracciata dal ch. prof. A. Korn (1), il quale non conosceva ancora il mio risultato. Qui voglio esporre un'altra dimostrazione, la quale si basa sui noti risultati del sig. Fredholm relativi alle equazioni funzionali (2) e vale certamente nell'ipotesi che le componenti degli spostamenti dei punti di σ, arbitrariamente date, siano finite e continue (3), che sia $k > -\frac{2}{3}$ e che la superficie σ soddisfi alle seguenti condizioni generali:

1° in ogni suo punto abbia il piano tangente determinato e variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° esista una lunghezza l tale che, preso un punto p_0 qualsiasi di σ e considerato il cilindro circolare avente per asse la normale n_0 a σ in p_0 e per raggio l, la porzione di superficie σ interna a questo cilindro sia incontrata in un solo punto al più dalle parallele ad n_0;

(1) Comptes Rendus; N. 6 (5 Février 1906). *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, ...*

(2) Acta mathematica, tome 27.

(3) L'ipotesi che fa in proposito il prof. Korn è assai più restrittiva.

3° esista un numero positivo a tale che, chiamando r_0 la distanza di p_0 da un altro punto p' qualsiasi di σ ed n la normale in p', si abbia [1]:

$$\widehat{nn_0} < ar_0 .$$

Le precedenti condizioni geometriche sono certamente soddisfatte per tutte le superficie a curvatura finita.

1. Dalle equazioni (1) si ha, integrando per parti,

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \int_S \left\{ u\left(\Delta^2 u + k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + v\left(\Delta^2 v + k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + \cdots \right\} dS = - \\ = -\int_S \left\{ \Delta u + \Delta v + \Delta w + k\theta^2 + \frac{2k}{2+k}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \right.\right. \\ + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \left.\left.\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} dS - \int_\sigma \left\{ u\left[\frac{\partial u}{\partial n} + k\theta\cos nx + \right.\right. \\ + \frac{k}{2+k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos ny + \frac{\partial w}{\partial x}\cos nz - \frac{\partial v}{\partial y}\cos nx - \left.\frac{\partial w}{\partial z}\cos nx\right)\right] + \\ \left. + v[\ldots.] + w[\ldots.]\right\} d\sigma . \end{cases}$$

Si può scrivere poi:

$$(3)\quad \begin{cases} \int_S \left\{ \Delta u + \Delta v + \Delta w + k\theta^2 + \frac{2k}{2+k}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \cdots - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} dS = \\ = \int_S \left\{ \frac{2}{2+k}(\Delta u + \Delta v + \Delta w) + k\frac{1+k}{2+k}\theta^2 + \frac{k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.\right. \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\Big] + \frac{2k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\Big\} dS = \\ = \int_S \left\{ \frac{(1+k)(2+3k)}{2+k}(\Delta u + \Delta v + \Delta w) - \frac{k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.\right. \\ + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\Big] - k\frac{1+k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \cdots\right] - \\ \left. - 3k\frac{1+k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \cdots\right]\right\} dS , \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} X_\sigma = \frac{\partial u}{\partial n} + k\theta\cos nx + \frac{k}{2+k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos ny + \cdots - \frac{\partial w}{\partial z}\cos nx\right) = \\ = \left\{(1+k)\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{1+k}{2+k}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\cos nx + \\ + \left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{2+k}\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cos ny + \left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{k}{2+k}\frac{\partial w}{\partial x}\right\}\cos nz , \\ Y_\sigma = \ldots\ldots , \quad Z_\sigma = \ldots\ldots \end{cases}$$

[1] $\widehat{nn_0}$ indica l'angolo formato dalle normali n, n_0 nelle direzioni che entrano in S.

Supponiamo che gl'integrali delle (1) si annullino nei punti di σ. Si avrà dalle (2), (3) per $k > -\frac{2}{3}$:

$$\text{(in tutto S)} \qquad u = v = w = 0 .$$

Supponiamo che u , v , w siano integrali delle (1) nello spazio indefinito S' limitato da σ, che a distanza infinita queste funzioni si annullino come l'inversa della distanza di un punto fisso dal punto variabile (x , y , z) e le loro derivate prime come il quadrato di questa inversa, e che nei punti di σ si abbia:

$$X_\sigma = Y_\sigma = Z_\sigma = 0 .$$

Dalle (2), (3), scritte per lo spazio S', risulta anche qui per $k > -\frac{2}{3}$:

$$\text{(in tutto S')} \qquad u = v = w = 0 .$$

2. Poniamo:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} ,$$

$$u' = \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} , \quad v' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} , \quad w' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}$$

Le funzioni u' , v' , w' sono integrali delle equazioni (1), sia che si considerino come funzioni di x , y , z, sia che si considerino come funzioni di ξ , η , ζ. Se si considerano come funzioni di ξ , η , ζ, si ha per le corrispondenti espressioni (4):

$$(5) \qquad X'_\sigma = \frac{2}{2+k} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \quad Y'_\sigma = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \ldots .$$

Similmente poniamo:

$$(6) \quad \begin{cases} u'' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} , \; v'' = \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} , \; w'' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z} ; \\ \ldots\ldots\ldots , \ldots\ldots\ldots\

3. Indipendentemente dalle precedenti formole, consideriamo le tre espressioni:

$$(7)\qquad \begin{cases} \Phi(x,y,z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma (X'_\sigma\, u + Y'_\sigma\, v + Z'_\sigma\, w)\, d\sigma\,, \\ \Psi(x,y,z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma (X''_\sigma\, u + Y''_\sigma\, v + Z''_\sigma\, w)\, d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

nelle quali *le funzioni* u, v, w *dei punti di* σ *sono arbitrarie ed assoggettate alla sola condizione di essere finite e continue.*

Osservando che le funzioni $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$; $X''_\sigma, \ldots$; $X'''_\sigma, \ldots$ sono formate dal prodotto di una funzione sempre finita per $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$, risulta facilmente [1] che *le espressioni* Φ, Ψ, X *hanno un significato e sono finite anche quando il punto* (x, y, z) *si trova su* σ.

Se indichiamo poi con p_0 un punto di σ, con $p \equiv (x, y, z)$ un punto di S e con $p' \equiv (x, y, z)$ un punto dello spazio indefinito S', si avranno le formole [2]:

$$(8)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{p=p_0} \Phi(x,y,z) = u(p_0) + \Phi(p_0)\ ,\ \lim\limits_{p=p_0} \Psi(x,y,z) = v(p_0) + \Psi(p_0)\,, \ldots \\ \lim\limits_{p'=p_0} \Phi(x,y,z) = -\,u(p_0) + \Phi(p_0)\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supponiamo ora che *le funzioni* u, v, w *dei punti di* σ *ammettano le derivate tangenziali dei primi due ordini finite e continue su tutta la superficie* σ. Indichiamo con n_0 la normale in un punto qualsiasi $p_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di σ, e poniamo:

$$(9)\qquad \begin{cases} P(x,y,z)_0 = \left\{(1+k)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + k\,\dfrac{1+k}{2+k}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + \dfrac{\partial X}{\partial z}\right)\right\}\cos n_0 x + \\ \qquad + \left\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \dfrac{k}{2+k}\,\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}\cos n_0 y + \left\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + \dfrac{k}{2+k}\,\dfrac{\partial X}{\partial x}\right\}\cos n_0 z\,, \\ Q(x,y,z)_0 = \left\{(1+k)\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + k\,\dfrac{1+k}{2+k}\left(\dfrac{\partial X}{\partial z} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right\}\cos n_0 y + \cdots\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

sizione (1): *le espressioni* $P(x,y,z)_0$, $Q(x,y,z)_0$, $R(x,y,z)_0$ *ammettono limiti determinati e finiti, quando il punto* $p \equiv (x,y,z)$ *dell'interno di* S (*o il punto* $p' \equiv (x,y,z)$ *di* S'), *mantenendosi sempre discosto da* σ, *si avvicina indefinitamente al punto* $p_0 \equiv (x_0,y_0,z_0)$, *e tali limiti soddisfanno alle condizioni*:

$$(10)\quad \lim_{p=p_0} P(x,y,z)_0 = \lim_{p'=p_0} P(x,y,z)_0 \,,\ \lim_{p=p_0} Q(x,y,z)_0 = \lim_{p'=p_0} Q(x,y,z)_0, \ldots$$

Finalmente, *ammessa la sola continuità delle funzioni* u, v, w *dei punti di* σ, si può dimostrare che (2), *se sono determinati e finiti*:

$$\lim_{p=p_0} P(x,y,z)_0 \,,\ \lim_{p=p_0} Q(x,y,z)_0 \,,\ \lim_{p=p_0} R(x,y,z)_0 ,$$

saranno ancora determinati e finiti:

$$\lim_{p'=p_0} P(x,y,z)_0 \,,\ \lim_{p'=p_0} Q(x,y,z)_0 \,,\ \lim_{p'=p_0} R(x,y,z)_0$$

e sussisteranno le (10); *e viceversa.*

Le proposizioni precedenti sono la naturale estensione agli integrali (7) delle note proprietà dei *doppi strati.*

4. In forza delle condizioni poste per la superficie σ, le coordinate x, y, z dei suoi punti si possono considerare come funzioni finite e continue, insieme alle loro derivate prime, dei parametri α, β di un sistema di coordinate curvilinee su σ; sicchè le funzioni (5), quando il punto (x,y,z) è nel punto (α_0,β_0) di σ e il punto $(\xi,\eta,\zeta) \equiv (\alpha,\beta)$ varia su σ, sono finite e continue rispetto ad α, β ed hanno solo un polo, del primo ordine rispetto ad $\frac{1}{r}$, per $\alpha = \alpha_0 , \beta = \beta_0$. Indichiamo queste funzioni rispettivamente con $X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$, $Y'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$, $Z'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)$, e con $X''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0),\ldots$; $X'''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0),\ldots$ le funzioni analoghe corrispondenti alle (6).

Siano $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta)$ *tre funzioni finite e continue dei punti di* σ, *date arbitrariamente.* Si considerino le equazioni funzionali:

$$(11)\quad \begin{cases} u(\alpha_0,\beta_0) = \varphi(\alpha_0,\beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\varphi(\alpha,\beta) + \\ \qquad + Y'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\psi(\alpha,\beta) + Z'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\chi(\alpha,\beta)\}\,d\sigma , \\ v(\alpha_0,\beta_0) = \psi(\alpha_0,\beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

con $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$ funzioni incognite dei punti di σ.

(1) Cfr. mia cit. Mem. § 6. cap. II.
(2) Cfr. ibid.. § 7, cap. II.

In virtù dei risultati del sig. Fredholm [1] si ha che *o esistono terne di funzioni* $\varphi_1(\alpha,\beta)$, $\psi_1(\alpha,\beta)$, $\chi_1(\alpha,\beta)$, *finite e continue in tutti i punti di* σ *e non identicamente nulle, tali che si abbia per qualsiasi punto* $p_0 \equiv (\alpha_0,\beta_0)$:

$$(12)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1(\alpha_0,\beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\varphi_1(\alpha,\beta) + \\ \qquad\qquad + Y'_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\psi_1(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma, \\ 0 = \psi_1(\alpha_0,\beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha,\beta;\alpha_0,\beta_0)\,\varphi_1(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\

Queste espressioni rappresentano, a meno del segno, le funzioni $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$, corrispondenti agli integrali (13) delle equazioni (1), considerati come funzioni dei punti (x, y, z) del campo indefinito S'; per cui risulterà, in forza del secondo risultato al § 1,

$$\text{(in tutto S')} \qquad \Phi_1(x, y, z) = \Psi_1(x, y, z) = X_1(x, y, z) = 0.$$

D'altra parte si ha dalle (8):

$$0 = \lim_{p'=p_0} \Phi_1(x, y, z) = -\varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma,$$

. . . . . ,

. . . . . ;

sicchè, tenendo conto delle (12), risulterà, come si voleva dimostrare,

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \psi_1(\alpha, \beta) = \chi_1(\alpha, \beta) = 0.$$

5. Dimostrata così l'esistenza delle funzioni $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, che soddisfanno alle equazioni funzionali (11), si considerino le funzioni dei punti $p \equiv (x, y, z)$ del campo S:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma\, \varphi(\alpha, \beta) + Y'_\sigma\, \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma\, \chi(\alpha, \beta)\}\, d\sigma,$$

. . . . . ,

. . . . . .

Esse soddisfanno alle equazioni (1) e ci dànno, in forza delle (8) e delle (11),

$$\lim_{p=p_0} u(x, y, z) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma = u(\alpha_0, \beta_0),$$

$$\lim_{p=p_0} v(x, y, z) = v(\alpha_0, \beta_0) \quad , \quad \lim_{p=p_0} w(x, y, z) = w(\alpha_0, \beta_0).$$

Adunque *le funzioni* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ *dei punti di* S, *per* $k > -\frac{2}{3}$, *soddisfanno alle equazioni* (1) *e nei punti di* σ *prendono i valori arbitrariamente dati* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Il sig. Lebesgue ha indicato a più riprese come la nozione dell'integrale generalizzato introdotta da lui, rendendo possibile l'integrazione di funzioni derivate che non lo sarebbero colla definizione del Riemann rende altresì possibile la risoluzione del problema delle funzioni primitive con generalità molto maggiore che precedentemente.

Il Lebesgue ha dato precisamente i due enunciati seguenti:

a) Condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale della derivata (limitata o non) di una funzione derivabile esista, è che la funzione sia a variazione limitata. In tal caso la funzione è un integrale indefinito della sua derivata (1).

b) Condizione necessaria e sufficiente perchè esista l'integrale di uno dei numeri derivati d'una funzione (supposto finito) è che la funzione sia a variazione limitata. In tal caso l'integrale indefinito di quel numero derivato è la funzione primitiva (2).

I due enunciati sono appena differenti in ciò che nel secondo non si suppone la derivabilità della funzione primitiva, ma si aggiunge una condizione nelle parole « supposto finito » che può esser dubbio se chieda o non la *limitazione* del numero derivato considerato. La costante differenza che il Lebesgue fa tra le parole « limitato » e « finito » (3) stabilirebbe fra i due enunciati la massima affinità: cionondimeno nella dimostrazione della seconda proposizione l'ipotesi della limitazione del numero derivato è essenziale.

Ma quanto massimamente importa qui di rilevare è che entrambe le dimostrazioni, quantunque fondate su principî diversi, sono in più punti manchevoli.

In questa prima Nota io mi propongo di portare a tali proposizioni una analisi più accurata, nell'indirizzo medesimo del Lebesgue: in Note successive, collo stesso titolo, darò, spero, qualche nuovo contributo allo studio delle proprietà delle funzioni derivate.

1. *I numeri derivati — superiori o inferiori, a destra o a sinistra —*

(1) Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire,* Annali di Mat. (3), 7, pag. 265, n. 30.

(2) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc., Paris, Gauthier-Villars, 1904, pp. 122-3. Cfr. pure Ann. di Mat., loc. cit., pp. 272-274.

(3) Per cui una funzione può esser finita per ogni valore della variabile, ma non limitata in quando, per convenienti valori della variabile assuma valori grandi a piacere.

di una funzione continua $f(x)$ costituiscono una funzione di 2ª classe del Baire; quindi una funzione misurabile (1).

Sia infatti $h_1 h_2 h_3 \ldots$ una successione di numeri positivi decrescenti tale che $\lim_{i=\infty} h_i = 0$.

Si chiami u_1 la funzione che, per ogni valore di x e uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ (2) per $h \geq h_1$, e per il valore fissato di x; u_2 la funzione che, per ogni valore di x, è uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ per $h_1 \geq h \geq h_2$; ...; u_i la funzione che, per ogni x, è uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ per $h_{i-1} \geq h \geq h_i$. Ogni funzione u_i è continua: sia infatti $u_i(x_1) = r[f(x_1), x_1, x_1+h']$, $u_i(x_2) = r[f(x_2), x_2, x_2+h'']$ (h' e h'' compresi fra h_{i-1} e h_i) e sia, per es. $u_i(x_1) \geq u_i(x_2)$: sarà $r[f(x_2), x_2+h'] \leq r[f(x_2), x_2, x_2+h''] = u_i(x_2)$; quindi $0 \leq u_i(x_1) - u_i(x_2) \leq u_i(x_1) - r[f(x_2), x_2, x_2+h']$. Ma $r[f(x), x, x+h']$ (per h' costante) è funzione continua di x; quindi esiste un ϱ' tale che, tosto che $|x_1 - x_2| \leq \varrho'$, l'ultimo membro è piccolo a piacere (minore di un ε assegnato); cosicchè, per ogni x tale che

$$u_i(x) \leq u_i(x_1), \; |x_1 - x| \leq \varrho', \text{ si ha } |u_i(x_1) - u_i(x)| < \varepsilon.$$

Del pari si mostrerà che esiste un ϱ'' tale che per ogni x per cui

$$u_i(x) \geq u_i(x_1), \; |x_1 - x| \leq \varrho'', \text{ si ha } |u_i(x_1) - u_i(x)| > \varepsilon.$$

Basterà allora che $|x_1 - x|$ sia minore del minimo fra ϱ' e ϱ'' perchè sia in ogni caso $|u_i(x_1) - u_i(x)| < \varepsilon$: onde la continuità di $u_i(x)$.

La funzione $\bar{u}(x)$ costituita dai numeri derivati superiori a destra di $f(x)$ assume, per ogni x, il valor limite per $h_i = 0$ (cioè per $i = \infty$) del limite superiore delle $u_j(x)$ per $j \geq i$. Essa può quindi definirsi come segue (3):

Si chiami $v_i^{(h)}(x)$ la funzione che, per ogni x, è uguale al massimo valore delle $u_h u_{h+1} \ldots u_{h+i-1}$; la funzione $v_i^{(h)}(x)$ è crescente (o almeno non decrescente) con i: si ponga $w^{(h)}(x) = \lim_{i=\infty} v_i^{(h)}(x)$; la funzione $w^{(h)}(x)$ è decrescente col tendere di h ad ∞, ed il suo limite è $\bar{u}(x)$; ora si vede

(1) Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 121. Ann. di Mat., pag. 273. Le due dimostrazioni sono entrambe erronee, poichè in sostanza si ammette in entrambe (nella seconda in modo esplicito) che la funzione costituita dai numeri derivati si possa definire come la funzione dei limiti superiori od inferiori di $r[f(x), x, x \pm h]$ ove ad h si fa assumere una successione discreta di valori tendenti a 0, gli stessi per ogni x.

(2) Ove $r[f(x), x, x+h] = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(3) Il procedimento qui indicato non differisce sostanzialmente da quello esposto dal Lebesgue nelle prime linee della pag. 121 delle *Leçons*. Nella forma precisa adottata dal Lebesgue il procedimento però non è esatto.

facilmente che le $v_i^{(h)}$ sono continue, come le u_i, le $w^{(h)}(x)$ sono dunque funzioni di 1ª classe del Baire (1) e quindi $\bar{u}(x)$ è funzione di 2ª classe.

Analogamente si ragiona per le altre funzioni di numeri derivati.

2. Ciò posto, si può dimostrare che, *se la funzione* $\bar{u}(x)$ *dei numeri derivati superiori a destra* (e lo stesso sarebbe per ogni altra funzione di numeri derivati) *della funzione* $f(x)$ *è limitata* (2) (nel qual caso, a causa della sua misurabilità, è certo integrabile (3)) *in un intervallo* $a \ldots b$, *l'integrale di essa esteso a questo intervallo è uguale all'incremento della* $f(x)$ *in esso.*

Sia infatti, per ogni x in $a \ldots b$, $L \geq \bar{u}(x) \geq l$; si può sempre supporre che L e l siano entrambi positivi, poichè nella contraria ipotesi, basterà considerare, in luogo della $f(x)$, $f(x) + mx$ la cui derivata superiore a destra è $\bar{u}(x) + m$ ed è quindi costantemente positiva ove si scelga m sufficientemente grande. Si divida l'intervallo $L \ldots l$ in intervalli parziali di ampiezza $\leq \varepsilon$ mediante i numeri $l_i (l_1 = l, 0 < l_{n+1} - l_n \leq \varepsilon)$ e si chiami e_n l'aggregato degli x per cui $l_{n+1} > \bar{u}(x) \geq l_n$. Esso potrà rinchiudersi in un aggregato numerabile A_n di segmenti, uno generico dei quali indicheremo con A_{np}, e si potrà fare in modo che la misura totale di A_n differisca dalla misura di e_n per meno di un η_n arbitrariamente assegnato: cosicchè dette $m(e_n)$ e $m(A_n)$ le misure di e_n e di A_n,

$$0 < m(A_n) - m(e_n) < \eta_n .$$

Disporremo in seguito del numero η_n convenientemente.

Ad ogni punto x di $a \ldots b$ risultano così affissi due numeri n e p definiti l'uno dall'aggregato e_n, l'altro dal segmento A_{np} cui il punto appartiene. A partire da a si ricopra allora l'intervallo $a \ldots b$ mediante una serie di segmenti (4) $x \ldots x + h$ tali che il primo estremo x di ciascuno di essi coincida col secondo estremo del segmento precedente, ovvero — qualora tal punto x non sia raggiunto mediante un numero finito di segmenti precedenti — sia il limite a destra dei secondi estremi dei segmenti precedenti; tali inoltre che, detti n e p i numeri affissi ad x, il segmento $x \ldots x + h$ sia interamente contenuto in A_{np} e si abbia

$$l_n - \varepsilon \leq r[f(x), x, x + h] \leq l_n + \varepsilon .$$

(1) Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Thèse, Annali di Matematica 1904. Cfr. pure Lebesgue, *Leçons*, pag. 111.

(2) Vale a dire non superi mai, in valore assoluto, un limite assegnato.

(3) Non sempre una funzione derivata è integrabile nel senso del Lebesgue (Cfr. Lebesgue, Annali di Mat. (3) pag. 269-270); però ogni funzione misurabile limitata è integrabile (Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 115). Si noti ancora che la condizione che $\bar{u}(x)$ sia limitata ha nel seguito ufficio essenziale per sè, e non solo come condizione d'integrabilità. Di tale ufficio non pare avvedersi il Lebesgue nella sua dimostrazione analoga alla presente, poichè tal condizione egli sopprime nell'enunciato delle pp. 122-123.

(4) Cfr. per questo procedimento, Lebesgue, *Leçons*, pag. 163.

Si chiami B_n l'aggregato di tali segmenti corrispondenti all'indice n, $m(B_n)$ la sua misura. B_n sarà contenuto in A_n; quindi $m(B_n) \leq m(A_n)$. Inoltre, se sempre x, $x+h$ sono gli estremi di un segmento della serie appartenente all'indice n,

$$(l_n - \varepsilon)\, h \leq f(x+h) - f(x) \leq (l_n + \varepsilon)\, h$$

onde

$$\sum l_n h - \varepsilon(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \sum l_n h + \varepsilon(b-a)$$

le sommatorie essendo estese a tutti i segmenti della serie. Queste sommatorie rappresentano quindi una serie che può essere multipla, anche ∞-pla; ma poichè si son supposti tutti gli l_n positivi, tal serie consta di soli termini positivi, ed è quindi ordinabile, in modo che si potranno raccogliere a gruppi i termini corrispondenti allo stesso indice n. La relazione precedente prende allora la forma

$$(1) \quad \sum_n l_n m(B_n) - \varepsilon(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_n l_n m(B_n) + \varepsilon(b-a).$$

D'altra parte si ha

$$0 \leq m(A_n) - m(B_n) \leq \sum_n [m(A_n) - m(B_n)] = \sum_n m(A_n) - \sum_n m(B_n)$$

$$\sum_n m(B_n) = b - a = \sum_n m(e_n)$$

onde

$$m(A_n) - m(B_n) \leq \sum_n m(A_n) - \sum_n m(e_n) < \sum_n \eta_n$$

e infine

$$0 \leq \sum_n l_n\, m(A_n) - \sum_n l_n\, m(B_n) = \sum_n l_n [m(A_n) - m(B_n)] < \sum_n l_n \cdot \sum_n \eta_n .$$

Parimenti, collo stesso calcolo, si ha

$$0 \leq \sum_n l_n\, m(A_n) - \sum_n l_n\, m(e_n) < \sum_n l_n \sum_n \eta_n ;$$

onde infine ancora

$$\left| \sum_n l_n\, m(e_n) - \sum_n l_n\, m(B_n) \right| = \left| \left\{ \sum l_n\, m(A_n) - \sum l_n\, m(B_n) \right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \sum l_n\, m(A_n) - \sum l_n\, m(e_n) \right\} \right| < \sum_n l_n \sum_n \eta_n \leq \frac{1}{2}(L+l)\, \frac{L-l}{\varepsilon} \sum_n \eta_n .$$

La scelta degli η_n resta ancora arbitraria: noi la supporremo fatta in modo che

$$\sum_n \eta_n \leq \varepsilon^2 \frac{2}{L^2 - l^2} .$$

Sarà allora

$$\left|\sum_n l_n\, m(e_n) - \sum_n l_n\, m(\mathrm{B}_n)\right| \leq \varepsilon$$

e quindi, per la (1),

$$\left|\sum_n l_n\, m(e_n) - [f(b) - f(a)]\right| \leq \left|\sum_n l_n\, m(\mathrm{B}_n) - [f(b) - f(a)]\right| + \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon(b - a + 1).$$

Si faccia ora tendere ε a 0, e di conseguenza crescere n indefinitamente; si avrà, al limite,

$$\int_a^b \overline{u}(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

3. Il ragionamento si può ripetere per le altre funzioni di numeri derivati. D'altronde se $\underline{u}(x)$ si chiama la funzione dei numeri derivati inferiori a destra di $f(x)$, $-\underline{u}(x)$ è la funzione dei numeri derivati superiori a destra di $-f(x)$, cosicchè, applicando senz'altro alla $-f(x)$ la precedente proposizione,

$$\int_a^b -\underline{u}(x)\, dx = -f(b) + f(a)$$

ossia

$$\int_a^b \underline{u}(x)\, dx = \int_a^b \overline{u}(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

onde

$$\int_a^b [\overline{u}(x) - \underline{u}(x)]\, dx = 0.$$

Siccome la funzione $\overline{u}(x) - \underline{u}(x)$ non è mai negativa, segue tosto che essa è ovunque nulla, tolto al più un aggregato di punti di misura nulla (1).

Applicando ancora il teorema alla funzione $-f(-x)$ che ha per numeri derivati a destra i numeri derivati a sinistra di $f(x)$ si riconosce infine che ha misura nulla l'aggregato dei punti in cui sono diversi i numeri derivati a destra e a sinistra (2) di $f(x)$, onde si conclude che:

La funzione continua $f(x)$ a numeri derivati limitati nell'intervallo $a \ldots b$ ha derivata in ogni punto dell'intervallo, fatta al più eccezione per un aggregato di misura nulla (3).

4. Si può però affermare di più, e con grande semplicità di mezzi, che *l'aggregato dei punti in cui, esistendo derivata così a destra come a sinistra le due derivate sono però diverse, è numerabile.* Si consideri infatti

(1) Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 123. L'osservazione che $\overline{u}(x) - \underline{u}(x) \geq 0$ è d'altronde superflua per questa conclusione come mostrò il Vitali, *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, XX-1905).

(2) Qui occorre precisamente ricorrere alla proposizione del Vitali, ora citata.

(3) Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pp. 123-125, dove però la dimostrazione è assai più laboriosa.

la funzione $\varphi(x\,;m) = f(x) + mx$; ogni punto in cui esistono ma son diverse le derivate a destra e a sinistra di $f(x)$ gode della stessa proprietà rispetto a $\varphi(x\,;m)$. Orbene i punti in cui queste due derivate di $\varphi(x\,;m)$ sono di segno contrario sono per $\varphi(x\,;m)$ punti di massimo o di minimo proprio: questi punti formano quindi un aggregato numerabile (1). Si considerino allora le funzioni $\varphi(x\,;m_1)$, $\varphi(x\,;m_2)$, ... per una serie di valori di m tali che $|m_i - m_{i+1}| \leq \varepsilon$; in ogni punto in cui le due derivate (a destra e a sinistra) differiscono per più di ε, una almeno di queste funzioni avrà le sue derivate di segno contrario; questi punti formano adunque un aggregato numerabile. Attribuendo allora a ε una successione di valori $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ ... tale che $\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$, si ottiene infine la proposizione enunciata.

5. Conseguenza immediata della proposizione del n. 2 è che *l'integrale indefinito d'una funzione limitata misurabile ha in ogni punto, ad eccezione di quelli di un aggregato di misura nulla, derivata limitata ed uguale alla funzione integrando* (2).

Sia infatti $\varphi(x)$ la funzione che si integra, e sia, per ogni x in un intervallo $a \ldots b$ $\mathrm{M} \geq \varphi(x) \geq \mathrm{N}$; si ponga

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx \quad (a \leq x \leq b).$$

Si ha

$$r[f(x)\,,x\,,x+h] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\,dx$$

onde

$$\mathrm{M} \leq r[f(x)\,,x\,,x+h] \leq \mathrm{N}.$$

I numeri derivati di $f(x)$ sono dunque limitati; sia $u(x)$ una qualunque funzione dei numeri derivati di $f(x)$: pel teorema del n. 2 si ha quindi

$$f(x) = \int_a^x u(x)\,dx \quad (a \leq x \leq b).$$

Segue che

$$\int_a^x [\varphi(x) - u(x)]\,dx = 0$$

onde, pel citato teorema del Vitali, le due funzioni $\varphi(x)$ ed $u(x)$ possono differire fra loro solo pei valori di x appartenenti a un aggregato di misura nulla.

(1) Schoenflies, *Bericht über Mengenlehre* (Jahresbericht d. D. Math.-Vereinigung 8-1900, pp. 157-158.

(2) In una Nota seguente dimostreremo che in questa proposizione è superflua la condizione che la funzione integrando sia limitata: si può anzi supporre che questa funzione possa anche assumere valori infiniti, purchè sia integrabile. Il Lebesgue, *Leçons*, pag. 124) afferma già questa proposizione in questa sua forma generalissima; ma la dimostrazione ch'egli ne dà non pare attendibile; quando infatti si ammette che la funzione integrando sia illimitata, il ragionamento della pag. 124 citata ammette implicitamente che una certa serie si possa derivare termine a termine del che manca la prova.

Matematica. — *Théorie et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre.* Nota di Ernest Lebon, presentata dal Socio V. Volterra.

En m'appuyant sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques, je suis arrivé à construire des tables donnant *très rapidement* la solution du double problème suivant:

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est premier ou composé, et, dans le second cas, trouver ses facteurs premiers.

Le procédé que j'emploie est applicable à de grands nombres.

Mon Mémoire sur ce sujet a été signalé à l'Académie des Sciences de Paris, dans la séance du 3 juillet 1905 (1).

1. Soient B le produit $\alpha\beta...\lambda$ de nombres premiers consécutifs $\alpha, \beta, ..., \lambda$, à partir de 2; P le produit $(\alpha - 1)(\beta - 1)...(\lambda - 1)$; I l'un quelconque des P nombres premiers à B et inférieurs à B; K un nombre successivement égal aux entiers positifs, à partir de 0.

On reconnaît aisément que: *Chacun des systèmes des* P *progressions arithmétiques de terme général* $BK + I$ *renferme tous les nombres premiers autres que ceux qui forment* B.

On peut dire que B est la *base* du système considéré et que I est l'*indicateur* d'un terme de ce système.

Deux indicateurs sont dits *complémentaires* lorsque leur somme est égale à la base.

2. Soient N, D et M des nombres d'un système de progressions de base B. Pour éviter l'ambigüité dans les explications, j'écrirai ainsi: $BK' + I'$ la forme du diviseur D.

Il est évident que *le nombre* N *est ou non divisible par le diviseur* D *selon que* K *et* M *sont ou non tels que l'équation*

$$BK + I = MD \tag{a}$$

soit satisfaite, B, I *et* D *étant connus.*

3. Soient k et m les valeurs *minima* de K et M satisfaisant à l'équation (a) et n un nombre successivement égal aux entiers positifs, à partir de 0. L'égalité

$$K = k + nD$$

(1) Comptes Rendus, Tome CXLI, n. 1, Paris, 1905, in 4°, pag. 78.

donne la valeur de K à laquelle correspondent tous les nombres N divisibles par le diviseur D.

De cette égalité, on tire la formule

$$(1) \qquad n = \frac{K - k}{D},$$

où K est le quotient entier obtenu en divisant N par B; le reste de cette division est la valeur de I.

On voit que: *Selon que la valeur trouvée pour* n, *en appliquant la formule* (1), *est entière ou fractionnaire, le nombre* N *est ou non multiple du diviseur* D.

Donc *la Table des nombres* k *établie pour un système de base* B *permet de reconnaître si* N *est premier, en divisant* K *par les nombres premiers inférieurs à* $\sqrt{N}$, *à partir de* λ, *et, si* N *n'est pas premier, de trouver ses facteurs premiers.*

On conçoit que cette méthode est d'autant plus expéditive que la base B est plus grande.

Avant d'appliquer la formule (1), il ne faut pas oublier que, si l'on considère un nombre N′, on doit d'abord, pour avoir N, enlever de N′ les facteurs premiers de la base B.

4. J'appellerai *caractéristiques* les nombres k.

5. Pour trouver méthodiquement et rapidement les caractéristiques k qui correspondent aux P progressions arithmétiques d'un système de base B, on peut se servir de la formule suivante, obtenue après avoir remplacé, dans l'équation (*a*), K et M par k et m, D par sa forme:

$$(2) \qquad k = \frac{I'm - I}{B} + K'm.$$

La formule (2) donne la caractéristique k quand la valeur de m est telle que le binôme $I'm - I$ soit divisible par B.

6. Les trois théorèmes suivants, faciles à démontrer, permettent de réduire notablement les opérations pour le calcul des caractéristiques k.

I. *Au produit* $I'm$ *des deux indicateurs* I′ *et* m *correspondent un indicateur* I *et une caractéristique* k; *cette caractéristique* k *convient aux deux diviseurs* I′ *et* m *du nombre* $I'm$ *de la progression arithmétique de base* B *et d'indicateur* I *donné par ce produit.*

II. *Les* P *progressions arithmétiques d'un système de base* B *étant rangées dans l'ordre croissant des indicateurs* I *de leurs termes, la somme des deux caractéristiques* k *et celle des deux valeurs de* m, *relatives à*

un même diviseur D *et à deux progressions équidistantes des extrêmes, sont respectivement égales à* D — 1 *et à* B.

III. *Si les valeurs de* I, *de* k_I, *de* I′ *et de m sont telles que l'égalité*

$$Bk_I + I = I'm$$

existe, et si l'on considère l'équation

$$Bk_{B-I} + (B - I) = (B - I')\,m,$$

où les deux indicateurs B — I *et* B — I′ *sont complémentaires des deux indicateurs* I *et* I′ *de l'égalité précédente, la caractéristique inconnue* k_{B-I} *est donnée par la formule*

$$k_{B-I} = m - 1 - k_I.$$

7. D'après les théorèmes II et III, il suffit, pour calculer le binôme I′m — I, d'associer à la première moitié des P valeurs de I′ la première moitié des P valeurs de m, rangées dans l'ordre croissant.

Le reste obtenu en divisant I′m par B est l'indicateur I relatif à une progression du système de base B.

Quand K′ est nul, le premier terme de la formule (2) donne, dans chacune des P progressions du système de base B, les P caractéristiques k correspondant aux P valeurs de I′.

D'après le théorème I, comme les caractéristiques k correspondant à l'indicateur I sont les mêmes quand D égale soit I′, soit m, il suffit de commencer les produits I′m à partir de la valeur de m égale à la valeur considérée de I′, c'est-à-dire au carré de I′. On sait que l'on applique le premier terme de la formule (2) seulement aux valeurs de m qui égalent les $\frac{P}{2}$ premiers indicateurs. D'ailleurs, aux produits de 1 par les indicateurs correspondent des caractéristiques k évidemment égales à 0. Par suite, parmi les P^2 caractéristiques k relatives aux P diviseurs qui égalent les indicateurs, il y a au plus $\frac{P(P-2)}{8}$ caractéristiques k dont la détermination exige une multiplication et une division.

8. La Table de caractéristiques k relatives à la base 30030, avec les diviseurs premiers de 17 à 30029 permet de résoudre le problème en question entre 1 et 30030^2 ou 901800900, c'est-à-dire pour des nombres beaucoup plus grands que le nombre 8999999 auquel s'arrêtent les Tables imprimées de facteurs premiers des nombres. Elle a de plus l'avantage de donner souvent plus d'un des facteurs premiers du nombre considéré, sans obliger à faire des divisions.

Soit N un nombre de la forme 30030K + I. Pour faire les essais, on s'arrêtera au diviseur premier D_n immédiatement inférieur à $\sqrt{N}$.

Si l'on ne trouve aucune différence $K - k$ divisible par les diviseurs premiers de 17 à D_n, N est premier.

Si l'on arrive à une différence $K - k$ divisible par le diviseur premier D, inférieur à D_n, N admet ce diviseur premier D. On divise N par D, le quotient obtenu par D, etc. Soit N_1 le dernier quotient ainsi obtenu: on opère avec N_1 comme on vient d'opérer avec N, en commençant par le diviseur premier qui suit D et on trouve que N_1 égale le produit de caractéristiques ou que N_1 est premier.

On reconnaît si une différence $K - k$ est divisible par le diviseur D correspondant le plus souvent sans effecteur la division par D de cette différence.

Pour reconnaître *instantanément* si une différence $K - k$ est divisible par le diviseur D correspondant, il suffit d'avoir, en même temps que la Table des caractéristiques relatives à la base 30030 jusqu'au diviseur 30029, une Table des restes R obtenus en divisant par les diviseurs D les nombres entiers consécutifs de 17 à 30029: en effet, une différence $K - k$ est divisible par le diviseur D correspondant, lorsque les valeurs de R et de k qui correspondent à ce diviseur sont égales.

La nouvelle Table occuperait une surface au moins 10 fois plus petite que celle qui serait occupée par les Tables qui existent et celles que l'on construirait jusqu'à 901800900, en adoptant l'ancienne disposition.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore* [1]. Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

1. Nelle precedenti Note su questo stesso argomento ho esaminato le formole principali da usarsi per la correzione della capacità dipendentemente dalla perturbazione provocata dall'orlo nella distribuzione elettrica di un condensatore. In questa mi propongo di sviluppare un artificio, già indicato nel principio del presente lavoro, che potrà permettere di isolare e di mettere in maggiore evidenza l'influenza dell'orlo, specialmente nel caso in cui venga usato l'anello di guardia, che riduce quell'influenza così notevolmente da farla quasi scomparire di fronte alla capacità del condensatore e da impedire una verifica diretta e rigorosa. D'altra parte, mi sono anche proposto di darne una conferma sperimentale, e di fare un esame sommario delle formole studiate sin qui per tre soli valori della distanza, per vedere se esse sono delle semplici astrazioni o seppure trovano una qualche rispondenza sperimentale.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa.

2. A tal fine ho usato due condensatori, uno circolare, l'altro ellittico, con o senza anelli di guardia, e d'area pressochè equivalente.

Il metodo seguito per le misure è puramente elettrostatico, limitandosi esso a determinare successivamente, mediante un elettrometro di Thomson-Mascart, la forza elettromotrice di quattro accumulatori ed i potenziali rispettivamente assunti da ciascun condensatore con e senza anello, quando si stabiliva la comunicazione tra la batteria ed un condensatore e poi tra questo e l'elettrometro.

Per evitare la dispersione è stato preferito tener conto della deviazione impulsiva dell'ago anzichè della definitiva, che si manteneva molto sensibilmente metà della prima, purchè venisse ridotto d'assai il sistema di smorzamento.

I condensatori furono ritagliati da una lastra di zinco tornita su ambe le faccie, e di cm. 0,5 di spessore; quello circolare fu ritagliato al tornio, quello ellittico con seghe da traforo, meglio che fu possibile. Gli anelli di guardia avevano lo stesso spessore ed una larghezza di cm. 9,2 per il circolare, e di cm. 8,5 per quello ellittico. Lo spazio d'aria (taglio) fra ciascun condensatore e ciascun anello fu, a montatura eseguita, sensibilmente di cm. 0,1.

La parte centrale del condensatore (collettore) fu fissata ad una robusta asta di vetro mediante una ghiera ingessata; l'asta di vetro era poi tenuta superiormente da un sostegno e poteva essere alzata ed abbassata per mezzo di una grossa vite micrometrica di cm. 0,1 di passo e con la testa divisa in 200 parti.

L'anello era sostenuto da cordoncini di seta raccomandati a varie viti e veniva, volta per volta, assai facilmente posto ad egual distanza dal collettore; e mediante un catetometro si procurava che le faccie inferiori dell'anello e del collettore fossero nello stesso piano ed inoltre parallele perfettamente alla faccia superiore del grande piatto legato alla terra, nonchè alla distanza desiderata da quest'ultimo.

L'ago dell' elettrometro era portato ad un determinato potenziale mediante una batteria di 200 piccoli accumulatori Planté ben isolati; una coppia di quadranti era tenuta isolata e l'altra coppia in buona comunicazione col suolo, col quale comunicava anche un polo della batteria suddetta. La distanza fra la scala e lo specchietto era di m. 1,15.

Le comunicazioni fra le varie parti furono fatte per mezzo di adatti e rapidi commutatori e di fili sottili di rame, fasciati ed isolati con ogni cura.

Stabilita la comunicazione fra i quattro accumulatori e la coppia di quadranti isolati, veniva letta la deviazione impulsiva dell'ago; poi, la coppia stessa era posta in comunicazione col suolo e, ritornato a zero l'ago, veniva stabilita quella tra gli accumulatori ed il condensatore (e l'anello, se ne era munito), ed immediatamente dopo, l'altra fra il condensatore e l'elettrometro, mentre l'anello veniva posto al suolo.

3. Nel § 8 della I^a Nota ho mostrato che se le formole delle striscie addizionali rappresentano con sufficiente precisione la influenza dell'orlo sulla capacità di un condensatore e che se esse sono effettivamente applicabili ad un contorno qualunque per il quale il raggio di curvatura in ogni punto sia abbastanza grande, presi due condensatori equivalenti in superficie e di cui l'uno l'abbia contorno circolare e l'altro ellittico, deve rimanere verificata, qualunque sia la distanza d, la relazione:

$$(1)\quad \frac{A}{2d}\left\{1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^3\cdots-\sqrt[4]{1-e^2}\right\}\lambda = k\left\{\frac{\Delta_e}{\Delta-\Delta_e}-\frac{\Delta_c}{\Delta-\Delta_c}\right\},$$

dove A è la grandezza dell'asse maggiore del contorno ellittico; e, l'eccentricità; k, la capacità dell'elettrometro e dei fili di congiunzione con ciascuno dei condensatori; Δ, Δ_e, Δ_c, sono le deviazioni direttamente osservate all'elettrometro quando è posto in comunicazione con la sorgente di carica, e con essa e con l'uno o l'altro dei due condensatori; λ, la larghezza della striscia addizionale di cui si vuole la verifica.

In altre parole, se le formole λ vanno bene, il valore di k ricavato dalla (1) deve essere costante con la distanza, purchè questa non sia troppo grande; esso poi ci darà, nel caso che sia costante solo in parte, per quali valori di d quelle formole sieno effettivamente applicabili.

4. Le dimensioni dei condensatori erano:

per il condensatore circolare:

raggio R = cm. 15,296 ; grossezza b = cm. 0,5 ;

per il condensatore ellittico:

semiassi: A = cm. 21,66 ; B = cm. 10,83 ; spess. b = cm. 0,5 .

I due condensatori non erano rigorosamente equivalenti; infatti:

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = \text{cm}^2\ 233{,}9676 \\ ab = \text{cm}^2\ 234{,}5778 \end{array}\right\} \text{differenza cm}^2\ 0{,}6102,$$

per cui, chiamando c la differenza di capacità dovuta soltanto alla non perfetta equivalenza delle superficie, sarà subito per i vari valori di d,

$$c = \frac{0{,}6102}{4d}.$$

Di essa si dovrà tenere conto per il calcolo di k.

Sostituendo nella (1) i valori numerici, e notando che

$$A = 2B \quad , \quad e^2 = \frac{3}{4} \quad , \quad \sqrt[4]{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

si ha per il primo membro, approssimativamente:

$$\frac{5,415}{d} \times 0,097594683 = \frac{1,05451\,\lambda}{d}\,.$$

La somma dei termini della serie è stata arrestata al 4° termine, perchè il 5° è già eguale a $1,2297 \times 10^{-10}$.

Ora, l'espressione (1) risulta dal calcolo di $C_e - C_c$, dove C_e e C_c sono le capacità corrette dei due condensatori nell'ipotesi che le aree dei dischi sieno esattamente equivalenti; quindi, per allontanarsi il meno possibile dalla realtà, occorre aggiungere c al 1° membro della (1), ed occorrerebbe anche tener conto per il contorno di un'altra correzione derivante dal fatto che $2\pi R$ e $2\pi\sqrt{AB}$ non sono rigorosamente eguali, come invece suppone il calcolo della (1). Trascurando però quest'ultima come assai piccola, si ha la relazione:

$$(2) \qquad \frac{0,6102}{4d} + \frac{1,05451}{d}\,\lambda = k\left\{\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}\right\}.$$

Riporto qui appresso nella tabella I-II le deviazioni Δ, Δ_e, Δ_c relative ai due condensatori e i valori dei rapporti $\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$ e $\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$.

Tabella I.
Condensatore ellittico

d	Δ	Δ_e	$\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$	Media
	180,3	171,3	19,033	
cm. 0,1	180,4	171,3	18,822	18,955
	180,1	171,1	19,011	
	176,2	159,5	9,550	
cm. 0,2	176,0	159,2	9,535	9,519
	175,9	159,1	9,470	
	179,0	123,0	2,196	
cm. 1	178,8	122,9	2,198	2,197
	178,8	122,8	2,193	
	178,5	122,7	2,199	

Tabella II.
Condensatore circolare

d	Δ	Δ_c	$\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$	Media
	174,8	166,0	18,864	
cm. 0,1	174,6	165,8	18,840	18,825
	174,0	165,2	18,772	
	149,7	135,4	9,468	
cm. 0,2	149,5	135,2	9,454	9,445
	149,3	134,7	9,440	
	170,8	116,8	2,163	
cm. 1	170,5	116,6	2,168	2,162
	170,4	116,4	2,155	
	170,3	116,4	2,162	

Applichiamo alla (2) le due formole:

$$(3) \qquad \lambda = \frac{2d}{\pi}\log 2\,,$$

$$(4) \qquad \lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2 + \frac{b}{2d}\right) + \frac{b}{2\pi}\log\left(1 + \frac{4d}{b}\right),$$

già esaminate nelle Note precedenti.

Riporto nella seguente tabella i valori dei vari termini della (2) e quelli di k ottenuti valendosi della (3) o della (4):

Tabella III

d cm.	c cm.	$\frac{1{,}05451\,\lambda}{d}$ dalla (3) cm.	$\frac{1{,}05451\,\lambda}{d}$ dalla (4) cm.	$\frac{\Delta_e}{\Delta-\Delta_e}-\frac{\Delta_c}{\Delta-\Delta_c}$	Capacità k dalla (3) cm.	Capacità k dalla (4) cm.
0,1	1,5255	0,4653	1,5029	0,130	*15,31*	*23,29*
0,2	0,7627	0.4653	1,1894	0,074	*16,59*	*26,38*
1	0,1525	0,4653	0,7287	0,035	*17,42*	*25,81*

I valori di k ricavati da una stessa formola sono abbastanza concordanti; mentre essi differiscono notevolmente per tutte le distanze, se ricavati da formole diverse. Ciò dipende naturalmente dal fatto che, come abbiamo già visto, la (3) e la (4) rappresentano assai diversamente l'entità dell'influenza dell'orlo.

5. Ma è proprio questa entità che il metodo in discorso permette di giudicare con esattezza, come quello che dà modo di osservare *direttamente* l'influenza dell'orlo isolatamente presa ed il comportamento delle formole teoriche, invece di rimettersi all'esame delle capacità corrette, per le quali si può dire che, nel confronto, la correzione dovuta all'orlo quasi scompaia di fronte ad esse, che di quella correzione sono sempre tanto più grandi. Di ciò è facile darne subito una dilucidazione ed una prova sperimentale.

Infatti i rapporti $\frac{\Delta_e}{\Delta-\Delta_e}$ e $\frac{\Delta_c}{\Delta-\Delta_c}$ non rappresentano altro, come è evidente, che i rapporti $\frac{C_e}{k}$ e $\frac{C_c}{k}$, dove C_e e C_c sono le capacità *vere* dei due condensatori. Prendendo allora, invece di esse, i valori delle capacità *corrette* ottenute dalle formole

$$\frac{S}{4\pi d}+\frac{L}{2\pi^2}\log_e 2\,, \tag{5}$$

$$\frac{S}{4\pi d}+\frac{L}{2\pi^2}\left\{\log_e\left(2+\frac{b}{2d}\right)+\frac{b}{4d}\log\left(1+\frac{4d}{b}\right)\right\}, \tag{6}$$

che derivano dalla (3) e dalla (4), e valendosi dei valori sperimentali delle tabelle I e II, si hanno per k i seguenti valori:

Tabella IV.

1) *dal condensatore ellittico*:

d cm.	Capacità teorica (corretta) dalla (5) cm.	dalla (6) cm.	$\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$	Capacità k dalla (5) cm.	dalla (6) cm.
0,1	588,366	598,837	18,955	31,041	31,593
0,2	295,144	303,074	9,519	31,006	31,839
1	60,566	64,666	2,197	27,568	29,434

Tabella V.

2) *dal condensatore circolare*:

0,1	586,606	595,819	18,825	31,161	31,650
0,2	294,146	301,105	9,445	29,577	30,277
1	60,178	63,776	2,162	27,834	29,498

Come si scorge subito, i valori di k ottenuti dall'uno o dall'altro condensatore, dall'una o dall'altra formola, sono sempre assai prossimi, ed eccettuate forse le distanze assai grandi, non sarebbe possibile con un metodo simile o con un altro metodo di confronto analogo a questo, giungere a risultati attendibili. Le notevoli differenze fra i dati della seconda e quelli della terza colonna di entrambe le tabelle si risolvono poi in variazioni irrisorie della capacità k, come di ogni altra presa per confronto.

Invece, una volta conosciuta con precisione e sperimentalmente, sia direttamente, sia indirettamente mediante qualche artificio, quella capacità k, la tabella III ci dice che sarà facile seguire l'andamento di ciascuna formola per i vari valori della distanza e farne quindi la scelta.

La stessa considerazione può ripetersi anche per lo spessore e per la verifica dei risultati delle Note precedenti.

D'altra parte, la conoscenza di k permetterà di ricavare direttamente dalla (2) il valore vero di λ, ossia di giudicare della influenza effettiva dell'orlo sulla capacità del condensatore.

Un metodo come questo è poi assolutamente vantaggioso per lo studio della formola (4), in quanto non si può fare per essa il confronto fra la capacità del condensatore e quella dello stesso quando è munito di anello di guardia, perchè bisogna forzatamente trascurare l'influenza dello spazio d'aria (taglio); altrimenti, usando per questa una qualunque delle formole esaminate, si giunge all'assurdo che la capacità del condensatore è più grande quando esso è circondato dall'anello che quando ne è privo.

Gli unici inconvenienti che presenta questo metodo sono: dal punto di vista teorico, la difficoltà di applicarlo, anche radicalmente modificato, alla verifica delle formole di Kirchhoff, e dal lato sperimentale, la costruzione del condensatore ellittico. Confido però che in un lavoro sistematico queste difficoltà potranno essere girate completamente.

Per converso le formole di Kirchhoff ammettono una verifica diretta e simultanea, come ho già detto nella Nota precedente.

6. Le precedenti considerazioni possono senz'altro essere estese al caso in cui il condensatore sia munito di anello di guardia; infatti in tal caso basta supporre che λ esprima l'influenza dell'orlo quando esso si trova in presenza dell'anello, perchè la (1) e la (2) sieno subito applicabili alla nuova disposizione e perchè si possa fare la verifica delle espressioni date per correggere l'influenza dovuta allo spazio d'aria esistente fra il disco e l'anello di guardia, e con vantaggio anche più notevole che nel caso precedente, essendo ora assai più piccoli i valori di λ.

Si potrebbero quindi, valendosi dei valori Δ', Δ_e', Δ_c' delle deviazioni date dall'elettrometro nel nuovo caso, rifare i calcoli di k e costruire delle tabelle perfettamente analoghe alle tabelle III, IV, V per le varie espressioni da esaminare.

Ecco intanto i valori di Δ', Δ_e', Δ_c', $\frac{\Delta_e'}{\Delta' - \Delta_e'}$, $\frac{\Delta_c'}{\Delta' - \Delta_c'}$, per i due condensatori con anelli di guardia.

Tabella VI.

Condensatori con anelli di guardia

d cm.	Condensatore ellittico				Condensatore circolare			
	Δ'	Δ_e'	$\frac{\Delta_e'}{\Delta' - \Delta_e'}$	Media	Δ'	Δ_c'	$\frac{\Delta_c'}{\Delta' - \Delta_c'}$	Media
0,1	173,2	164,5	18,908	18,888	180,1	171,0	18,791	18,773
	173,0	164,3	18,885		180,0	170,6	18,747	
	172,9	164,2	18,873		179,8	170,7	18,780	
0,2	179,4	162,2	9,430	9,456	168,4	152,2	9,395	9,369
	179,1	162,0	9,473		166,2	150,2	9,387	
	179,0	161,9	9,467		165,4	149,9	9,308	
1	169,8	111,4	1,907	1,904	178,0	116,3	1,884	1,874
	169,6	110,8	1,884		177,6	115,7	1,869	
	169,6	111,3	1,909		177,4	115,6	1,870	
	169,4	111,3	1,915		177,3	115,6	1,873	

7. Ora però, anzichè ripetere le tabelle di cui si è parlato più sopra e che condurrebbero a risultati del tutto simili a quelli avuti per l'orlo libero, sarà invece utile, valendosi dei dati precedenti, formarsi un'idea, sia pure incompleta, di tutte le formole studiate sin qui, per ciò che almeno riguarda la loro rispondenza sperimentale.

A tale scopo nella tabella VII sono stati riportati: nella 1ª colonna, i valori delle distanze; poi, successivamente, i valori di $\frac{S}{4\pi d}$; delle capacità teoriche corrette dei due condensatori senza anello (C) e degli stessi muniti di anello (C′); di $\frac{C}{k}$, eguale a $\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$ o $\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$ a seconda che si tratta dell'uno o dell'altro condensatore; di $\frac{C'}{k}$, eguale a $\frac{\Delta_e'}{\Delta' - \Delta_e'}$ o $\frac{\Delta_c'}{\Delta' - \Delta_c'}$, ed infine i valori *teorici* di $\frac{C}{C'}$ ricavati dai dati della 3ª e 4ª colonna e quelli *sperimentali* avuti dai rapporti $\frac{C}{k}$ e $\frac{C'}{k}$ dedotti dall'esperienza.

Superiormente ad ogni serie sono indicate le espressioni di λ e λ' usate per il calcolo di C e di C′.

Tabella VII

d cm.	$\frac{S}{4\pi d}$ cm.	C cm.	C′ cm.	$\frac{C}{k}$	$\frac{C'}{k}$	Valori di $\frac{C}{C'}$ teorici	sperimentali
			Condensatore ellittico				
(1)			$\begin{cases}\lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2+\frac{b}{2d}\right)+\frac{b}{\pi}\log\left(1+\frac{4d}{b}\right)\\ \lambda' = c\end{cases}$				
0,1	586,444	598,837	590,801	18,955	18,888	*1,0136*	*1,0035*
0,2	293,222	303,074	295,400	9,519	9,456	*1,0260*	*1,0067*
1	58,644	64,666	59,089	2,197	1,904	*1,0944*	*1,1539*
			Condensatore circolare				
(1)			$\begin{cases}\lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2+\frac{b}{2d}\right)+\frac{b}{\pi}\log\left(1+\frac{4d}{b}\right)\\ \lambda' = c\end{cases}$				
0,1	584,919	595,819	588,743	18,825	18,773	*1,0120*	*1,0028*
0,2	292,459	301,105	294,371	9,445	9,369	*1,0229*	*1,0081*
1	58,491	63,776	58,873	2,162	1,874	*1,0833*	*1,1537*
(2)			$\begin{cases}\lambda = \frac{d}{\pi}\log\frac{8\pi R}{ed}\\ \lambda' = c\end{cases}$				
0,1	584,919	602,578	588,743	18,825	18,773	*1,0235*	*1,0028*
0,2	292,459	308,428	294,371	9,445	9,369	*1,0478*	*1,0081*
1	58,491	70,542	58,873	2,162	1,874	*1,1982*	*1,1537*
(3)			$\begin{cases}\lambda = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)R}{ed^2}+\frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\}\\ \lambda' = c-\frac{2d}{\pi}(\beta_0\tan\beta_0+\log\cos\beta_0)\end{cases}$				
0,1	584,919	607,677	588,162	18,825	18,773	*1,0332*	*1,0028*
0,2	292,459	312,195	294,219	9,445	9,369	*1,0611*	*1,0081*
1	58,491	72,068	58,872	2,162	1,874	*1,2241*	*1,1537*

8. Se da questo esame sommario e fatto a solo titolo dimostrativo è permesso, dopo quello che è stato esposto innanzi rispetto alla attendibilità delle interpretazioni dei rapporti fra capacità, di trarre una conclusione qualsiasi, essa non può esser che questa: che, cioè, le varie formole esaminate sono tutte applicabili alla correzione della capacità con un approssimazione molto relativa e con differenze più o meno lievi a seconda della distanza fra le armature. Però, è anche da notare che esse non si comportano egualmente: infatti, mentre la (1) deve essere sicuramente rispondente alla realtà per entrambi i condensatori, ossia per qualunque contorno, in un certo intervallo dei valori della distanza compreso fra cm. 0,2 e cm. 1, dal momento che i valori sperimentali di $\frac{C}{C'}$, dapprima minori di quelli ricavati dal calcolo, invertono il loro andamento con l'aumentare della distanza; l'insieme delle formole (2) e (3) dedotte da quelle di Kirchhoff, sembra invece in eccesso per i valori di $d \leq$ cm. 1. Può darsi che restino verificate per valori maggiori. Però, in tutto questo, un giuoco non indifferente deve forse venire esercitato anche dalla forma più o meno rigorosamente tagliente dell'orlo. Ed è ciò che sarà bene venga osservato da vicino.

Altri studi ed altre indagini più precise e sistematiche sono in corso in questo stesso Istituto, e ne saranno quanto prima comunicati i risultati.

Meteorologia. — *La pioggia a Roma.* Nota del dott. Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Nella vecchia torre al Collegio Romano le osservazioni meteorologiche cominciarono nel 1788 sotto la direzione dell'abate Giuseppe Calandrelli; esse furono continuate là sotto le direzioni dei PP. Stefano Dumouchel, Francesco Vico ed Angelo Secchi. Nel nuovo Osservatorio sopra la chiesa di Sant'Ignazio furono proseguite sotto le direzioni del P. Angelo Secchi, del P. Stanislao Ferrari, di Pietro Tacchini e di Elia Millosevich, attuale direttore dell'Osservatorio. Secondo l'autorevole parere di Angelo Secchi le serie delle osservazioni udometriche acquistano uniformità, continuità e sicurezza soltanto dal 1825. L'altitudine dell'udometro fino al 1855 incluso fu di m. 65, l'attuale apparecchio è, dal 1856, all'altezza di m. 56,7.

Sopra il palazzo del Campidoglio, trovansi l'omonimo R. Osservatorio Astronomico dove sin dal 1873 e successivamente sotto la direzione del Respighi e del Di Legge si eseguiscono regolarmente osservazioni meteorologiche. Il pluviometro si trova a m. 69,6 sul livello del mare.

I cerchi meridiani dei due Osservatorî distano 704 metri ed i due pluviometri si trovano quasi nelle stesse condizioni di esposizione.

Col presente studio, ci proponiamo di esaminare le osservazioni pluviometriche che sin dal 1825 si sono accumulate, e di assegnare i valori normali della pioggia (1). E in questa prima Nota, ci occupiamo della distribuzione mensile ed annua.

Nella tabella qui sotto trascritta, consegniamo le medie mensili ed annue che spettano ai due R. Osservatorî considerando l'uguale periodo di 33 anni (1873-1905). Trovansi pure le differenze tra i valori medi dei due Osservatorî e dalle quali risulta che da Agosto ad Aprile, nell'Osservatorio del Collegio Romano, si è registrata una quantità di pioggia superiore a quella notata nell'Osservatorio del Campidoglio e da Maggio a Luglio minore.

La minore altitudine del pluviometro dell'Osservatorio del Collegio Romano, ha certamente contribuito ad aumentare quivi la registrazione pluviometrica poichè, come è noto, in basso si registra più precipitazione. La minore registrazione nei mesi estivi, potrà forse dipendere dal fatto che essendo, in detta stagione, gli strati inferiori dell'atmosfera più caldi, nel caso di non intense precipitazioni, le goccie di acqua si evaporano producendo semplicemente delle quantità di precipitazione quasi non misurabili. Però la piccolezza delle differenze ci dice come poca variabilità riscontrasi nelle due serie di osservazioni.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Osservat. Collegio Romano (1873-1905) .	85,1	69,5	75,8	82,8	59,1	43,8	20,1	24,3	77,8	140,7	117,8	103,3	900,1
Osservat. Campidoglio (1873-1905)	82,8	65,0	74,8	82,0	59,9	44,3	20,6	23,4	74,8	136,0	112.9	98,9	875,4
Osservat. Collegio Romano — Osservat. Campidoglio	+ 2,3	+ 4,5	+ 1,0	+ 0,8	— 0,8	— 0,5	— 0,5	+ 0,9	+ 3,0	+ 4,7	+ 4,9	+ 4,4	+ 24,7

Però per potere studiare la pioggia nel clima di Roma, non si può fare a meno dal considerare le osservazioni eseguite tanto nell'Osservatorio del Collegio Romano quanto nell'Osservatorio del Campidoglio. E per avere delle serie tra di loro paragonabili e nello stesso tempo racchiudenti l'intero periodo di 81 anni di osservazioni, nella tabella seguente, trovansi i valori medi

(1) Per l'Osservatorio del Collegio Romano, non avendo potuto, per alcune circostanze, esaminare le osservazioni originali, i dati dal 1825 al 1882 furono tolti dalla pregiata pubblicazione del prof. E. Millosevich: *Sulla distribuzione della pioggia in Italia*, dal 1883 al 1892 furono tolti dagli Annali del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e dal 1893 al 1905 furono direttamente calcolati sulle schede decadiche che l'Osservatorio Astronomico invia al predetto Ufficio Centrale. Per l'Osservatorio del Campidoglio, i dati dal 1873 al 1882 furono tolti dalla prelodata pubblicazione del Millosevich, e dal 1883 al 1892 dagli Annali di Meteorologia e dal 1893 al 1905 furono direttamente calcolati sulle schede decadiche che l'Osservatorio invia al predetto Ufficio Centrale.

mensili dell'Osservatorio del Collegio Romano per l'intero periodo (1825-1905) ed i valori medi mensili dell'Osservatorio del Campidoglio, pel medesimo periodo, ottenuti applicando alle prime le differenze poc'anzi notate; e trascurando, d'altra parte, la piccola correzione che si sarebbe dovuto applicare pel fatto che dal 1825 al 1855 il pluviometro del Collegio Romano trovavasi di poco più elevato, attesochè le differenze che intercedono fra i valori medii dei due Osservatorî sono molto minime.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Osservat. Collegio Romano (1825-1905) . .	79,4	62,3	68,2	65,6	56,7	40,1	18,0	27,6	71,7	114,5	113,3	90,0	807,4
Osservat. Campidoglio (1825-1905)	77,1	57,8	67,2	64,8	57,5	40,6	18,5	26,7	68,7	109,8	108,4	85,6	782,7

Per meglio paragonare le due serie di osservazioni, calcoliamo la *piovosità relativa* dei varii mesi; intendendo con tale espressione il rapporto tra le altezze di pioggia registrate nei varii mesi e l'altezza della pioggia registrata nell'anno. Tali valori, supponendo il totale annuo uguale a 1000, trovansi qui sotto riportati.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Osservat. Collegio Romano	98	77	85	81	70	50	22	34	89	142	140	112	1000
Osservat. Campidoglio	99	74	86	83	73	52	24	34	88	140	138	109	1000

Percorrendo tale tabella, appare come cada nelle due località quasi la stessa frazione della pioggia totale dell'anno. Però siccome altri hanno notato [1] nel calcolo della piovosità relativa, non si tiene conto della durata ineguale dei mesi. Tale difficoltà si può eliminare nel seguente modo: se la ripartizione della pioggia fosse uniforme in tutto l'anno, in un mese di 31 giorni ne cadrebbe 0,085 del totale annuo, in un mese di 30 giorni 0,082 e in un mese di 28 giorni 0,077. Ora sottraendo rispettivamente uno di questi numeri 85, 82, 77 da quelli che rappresentano la piovosità relativa del mese, avremo l'*eccesso pluviometrico relativo* del mese, cioè a dire la frazione di cui la pioggia di tale mese differisce da quella che corrisponderebbe ad una distribuzione uniforme durante l'anno. Applicando questo calcolo ai numeri scritti avanti, si ottengono i seguenti risultati.

[1] A. Angot, *Valeurs normales de la température, de la pression et de la pluie à Paris.* Annales du Bureau central Météorologique de France, année 1890, Paris 1892.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Osservat. Collegio Romano	+ 13	0	0	— 0,1	— 15	— 32	— 63	— 51	+ 0,7	+ 57	+ 58	+ 27
Osservat. Campidoglio	+ 14	— 0,3	— 0,1	+ 0,1	— 12	— 30	— 61	— 51	+ 0,6	+ 55	+ 56	+ 24
Media . . .	+ 14	— 0,1	0	0	— 13	— 31	— 62	— 51	+ 0,65	+ 56	+ 57	+ 25,5

La differenza tra i valori relativi ai due Osservatorî è molto piccola, cosicchè prendendo la media avremo la rappresentazione della legge della distribuzione annua della pioggia. E risulta che l'anno è diviso in due periodi: uno comprende i mesi da Settembre a Gennaio incluso, in ciascuno dei quali la quantità di pioggia registrata è più grande di quella che corrisponderebbe ad una ripartizione uniforme in tutto l'anno. l'altro periodo comprende i rimanenti mesi dei quali in uno (Aprile) si ha una pioggia uguale a quella che corrisponderebbe ad una ripartizione uniforme e nei rimanenti minore.

Diamo qui appresso la distribuzione per decennio trascrivendo la somma delle precipitazioni corrispondente a ciascun decennio del periodo considerato, per mese, per stagioni meteorologiche e per anno, e dove i massimi e i minimi sono notati in carattere corsivo.

servatorio Collegio omano	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
25 — 1834	768,1	*393,9*	*395,2*	484,9	523,7	427,9	211,4	222,2	716,2	*605,0*	961,6	*656,2*	*1818,2*	*1403,8*	861,5	*2282,8*	*6366,3*
35 — 1844	*585,6*	809,7	614,5	583,2	668,6	*248,4*	113,7	315,8	724,5	800,4	*877,4*	664,3	2059,6	1866,3	677,9	2402,3	7006,1
45 — 1854	674,0	499,5	521,8	609,4	485,6	461,4	225,9	**406,5**	729,4	884,4	**1349,3**	858,4	2031,9	1616,8	**1093,8**	2963,1	7705,6
55 — 1864	889,8	700,0	707,0	*508,6*	**725,7**	311,0	*91,8*	267,9	648,1	1382,9	1264,3	1000,3	2590,1	1941,3	*670,7*	3295,3	8497,4
65 — 1874	814,8	501,0	842,3	610,9	*373,3*	373,5	196,1	249,6	*602,0*	1355,6	1069,2	860,2	2176,0	1826,5	819,2	3026,8	7848,5
75 — 1884	747,9	505,3	697,7	**914,6**	586,0	522,8	99,5	237,5	**1030,5**	1259,9	937,7	941,1	2194,3	**2198,3**	859,8	3228,1	8480,5
85 — 1894	**1212,1**	668,1	824,4	854,9	444,5	285,8	231,6	*213,8*	653,7	1183,1	1145,7	950,2	2830,4	2123,8	731,2	2982,5	8667,9
95 — 1904	675,0	**835,2**	**850,5**	661,8	647,5	**523,7**	**255,0**	281,8	666,3	**1737,5**	1316,6	**1330,4**	**2840,6**	2159,8	1067,8	**3713,1**	**9781,3**

In fine della presente Nota, trovasi la quantità di pioggia notata in ciascun mese e in ciascuna stagione e nell'anno per ciascun anno del periodo anzidetto e per ciascun Osservatorio.

Utilizzando i valori relativi all' Osservatorio del Collegio Romano abbiamo esaminato in quale mese di ciascun anno del periodo è stata registrata la maggior quantità di precipitazione; e qui sotto trovasi indicato quante volte ciascun mese dell'anno ha registrato il più elevato valore pluviometrico.

Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
9	4	6	3	0	1	0	1	7	16	18	16

Percorrendo tali valori, risulta che Novembre, Dicembre, Ottobre, sono i mesi che hanno più frequentemente la massima pioggia mensile dell'anno, ossia che in detti mesi più frequentemente suole verificarsi la massima precipitazione.

Diamo ora la massima e la minima precipitazione di ciascun mese per l'intero periodo di 81 anni.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Massima	205,4	173,1	171,5	183,7	148,1	139,0	113,1	104,9	225,5	328,6	372,5	273,6
Minima	10,2	0,0	0,0	0,1	0,7	0,3	0,0	0,0	0,7	8,2	12,6	0,1
M — m	195,2	173,1	171,5	183,6	147,4	138,7	113,1	104,9	224,8	320,4	359,9	273,5

Ed esaminando la differenza tra la massima e la minima, risulta che la maggiore variazione dell'altezza della pioggia si ha in Novembre, Ottobre, Dicembre, cioè nei mesi che sogliono possedere la massima precipitazione.

R. Osservatorio Astronomico del Collegio Romano.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
1825	39,9	0,8	8,9	15,8	9,2	24,0	9,5	3,8	22,8	32,1	39,3	142,7	183,4	33,9	37,3	94,2	348,8
26	59,6	36,1	67,1	56,7	97,5	51,6	21,1	9,6	73,2	97,8	346,0	19,0	114,7	221,3	82,3	517,0	935,3
27	110,8	72,7	29,6	25,1	60,2	81,9	24,7	21,7	88,8	90,2	60,3	19,1	202,6	114,9	128,3	239,3	685,1
28	41,4	68,4	66,7	36,5	37,9	39,6	0	0,2	18,8	96,2	54,4	13,1	122,9	141,1	39,8	169,4	473,2
29	161,6	5,5	48,1	45,1	50,0	80,2	6,9	23,9	123,8	92,4	104,3	164,1	331,2	143,2	111,0	320,5	905,9
30	131,7	43,5	4,5	0,1	46,4	8,4	10,2	77,4	69,9	40,0	61,1	187,0	362,2	51,0	96,0	171,0	680,2
31	91,9	14,9	25,8	135,2	91,6	18,2	55,8	29,1	104,7	61,0	68,8	42,2	149,0	252,6	103,1	234,5	739,2
32	88,7	56,8	91,3	44,0	33,7	118,2	5,7	30,7	4,1	8,2	98,1	36,6	182,1	169,0	154,6	110,4	616,1
33	12,3	59,8	53,2	121,0	26,2	3,6	43,6	14,7	190,3	60,9	57,3	20,2	92,3	200,4	61,9	308,5	663,1
1834	30,2	35,4	0	5,4	71,0	2,2	33,9	11,1	19,8	26,2	72,0	12,2	77,8	76,4	47,2	118,0	319,4
1835	12,2	18,4	58,0	29,6	77,2	91,0	14,8	93,4	67,2	37,7	52,6	36,3	66,9	164,8	199,2	157,5	588,4
36	10,2	147,8	47,9	87,6	97,0	13,7	6,7	27,9	86,1	70,1	75,9	64,5	222,5	232,5	48,3	232,1	735,4
37	68,8	38,8	116,2	83,7	81,5	12,7	27,2	12,3	70,2	34,0	81,0	38,9	146,5	281,4	52,2	185,2	665,3
38	114,4	126,0	64,9	80,8	51,4	20,3	21,0	28,5	40,8	103,8	74,9	81,5	321,9	197,1	69,8	219,5	808,3
39	62,1	10,5	127,9	47,3	39,2	10,2	23,2	66,7	111,9	110,9	80,8	98,4	171,0	214,4	100,1	303,6	789,1
40	17,2	66,0	51,1	83,5	59,4	0,2	2,7	0,1	40,7	40,2	88,7	67,1	150,3	194,0	3,0	169,6	516,9
41	109,8	105,2	29,5	73,2	19,8	40,6	3,1	13,7	56,6	113,4	64,6	84,5	299,5	122,5	57,4	234,6	714,0
42	111,9	17,5	27,8	66,2	116,1	13,5	9,6	70,6	113,2	178,6	76,3	17,7	147,1	210,1	93,7	368,1	819,0
43	48,6	181,6	58,1	20,2	35,0	15,5	3,1	0	39,5	45,7	107,5	0,1	230,3	113,3	18,6	192,7	554,9
1844	30,4	97,9	33,1	11,1	92,0	30,7	2,3	2,6	98,3	66,0	175,1	175,3	303,6	136,2	35,6	339,4	814,8
1845	104,8	59,5	47,7	96,1	51,1	36,8	3,7	36,6	94,4	58,3	296,1	93,8	258,1	194,9	77,1	448,8	978,9
46	36,6	8,2	43,2	36,0	54,6	1,4	0,1	94,8	164,4	224,7	84,3	217,2	262,0	133,8	96,3	473,4	965,5
47	90,0	80,5	65,3	68,9	20,9	46,2	91,7	61,4	5,9	39,3	63,0	165,4	335,9	155,1	199,3	108,2	798,5
48	55,0	66,2	105,0	59,2	60,9	8,1	24,7	0,1	50,7	113,0	74,6	20,3	111,5	225,1	32,9	238,3	637,8
49	32,3	0,9	17,8	129,4	31,1	69,6	34,4	22,7	38,6	33,8	37,8	63,2	96,4	178,3	126,7	110,2	511,6
50	112,7	31,7	16,5	60,1	57,6	139,0	11,4	25,4	65,9	145,0	37,4	39,1	183,5	134,2	175,8	248,3	741,8
51	15,6	18,7	64,9	29,1	57,2	28,5	13,7	43,5	166,3	40,9	317,9	4,9	39,2	151,2	85,7	525,1	801,2
52	97,8	37,2	38,1	36,7	33,4	1,4	31,3	69,2	65,1	89,0	34,7	20,2	155,2	108,2	101,9	188,8	554,1
53	68,5	173,1	108,6	67,7	27,2	114,2	2,3	44,2	40,7	89,2	87,7	139,0	380,6	203,5	160,7	217,6	962,4
1854	60,7	23,5	14,7	26,2	91,6	16,2	12,6	8,6	37,4	51,2	315,8	95,3	179,5	132,5	37,4	404,4	753,8
1855	93,3	78,1	133,5	49,7	44,3	82,5	0	8,2	82,6	110,3	102,9	58,2	229,6	227,5	90,7	295,8	843,6
56	118,0	56,7	45,7	74,0	114,5	13,3	10,2	12,0	70,0	56,8	59,7	173,7	348,4	234,2	35,5	186,5	804,6
57	125,5	15,6	71,5	87,5	45,8	7,9	7,0	43,6	50,7	216,8	89,2	19,5	160,6	204,8	58,5	356,7	780,6
58	40,5	99,7	71,1	27,0	37,5	55,9	9,0	67,6	52,0	154,3	156,7	110,8	251,0	135,6	132,5	363,0	882,1
59	13,5	47,0	45,0	16,8	126,2	39,5	13,9	53,5	31,0	116,5	81,6	133,3	193,8	188,0	106,9	229,1	717,8
60	168,6	91,3	54,1	156,0	82,9	14,1	19,2	1,1	31,8	26,9	151,4	173,0	432,9	293,0	34,4	210,1	970,4
61	89,1	98,5	54,9	49,7	30,9	41,3	32,1	2,0	98,0	106,0	63,4	10,5	198,1	135,5	75,4	267,4	676,4
62	82,5	76,6	57,0	32,0	43,6	28,3	0,1	64,6	135,6	109,1	223,1	95,5	254,6	132,6	93,0	467,8	948,0
63	117,4	0	75,5	9,0	116,5	0,8	0	15,1	19 6	338,5	167,7	88,1	200,5	201,0	15,9	525,8	943,2
1864	41,4	136,5	98,7	6.9	83,5	27,4	0,3	0,2	76,8	147,7	163,6	142,7	320,6	189,1	27,9	393,1	930,7
1865	99,0	59,2	135,6	2,2	4,2	39,2	12,9	4,2	17,5	134,9	146,6	34,3	192,5	142,0	56,3	299,0	689,8
66	44,7	19,8	124,6	73,8	40,3	22,3	0,3	7,5	35,1	84,4	38,9	24,0	88,5	248,7	30,1	158,4	525,7
67	152,6	21,5	75,5	20,7	9,0	18,8	12,6	104,9	46,2	183,1	22,1	71,5	245,6	105,2	136,3	251,4	738,5
68	127,0	6,3	36,6	57,5	63,1	92,5	79,8	33,5	133,5	121,7	126,4	37,1	170,4	157,2	205,8	381,6	915,0
69	13,3	22,1	153,9	57,4	1,3	21,8	12,1	28,8	65,5	81,3	83,1	182,3	217,7	212,6	62,7	229,3	722,9
70	58,2	97,1	23,7	62,0	24,5	67,2	37,0	10,6	14,6	71,8	122,2	227,1	382,4	110,2	114,8	208,6	816,0
71	112,2	37,1	111,1	41,8	32,9	48,6	0,2	1,0	18,3	40,3	196,9	21,7	171,0	185,8	49,8	255,5	662,1
72	92,5	86,6	115,3	76,1	59,9	48,4	3,2	30,9	91,4	238,4	105,2	102,4	281,5	251,3	82,5	435,0	1050,3
73	65,9	110,9	36,1	119,1	32,5	14,4	0	0,4	79,9	288,1	98,9	8,6	185,4	187,7	14,8	466,9	854,8
1874	49,4	40,4	19,9	100,3	105,6	0,3	38,0	27,3	100,0	111,6	128,9	151,2	241,0	225,8	66,1	340,5	873,4
1875	47,9	72,8	165,0	93,0	0,7	112,9	20,5	18,0	155,8	322,1	150,6	73,2	193,9	258,7	151,4	628,5	1232,5
76	87,3	85,6	52,9	82,7	69,4	49,7	22,1	47,2	27,9	20,0	73,5	127,9	300,8	205,0	119,0	121,4	746,2
77	59,5	23,5	94,9	76,5	20,5	73,8	11,5	12,0	34,0	91,1	67,5	155,3	238,3	191,9	97,3	192,6	720,1
78	42,8	9,1	57,1	43,9	0,8	19,2	20,0	5,6	113,3	198,8	372,5	137,6	189,5	101,8	44,8	684,6	1020,7
79	74,9	134,1	38,1	183,7	148.1	0,2	0,1	1,9	50,0	93,9	28,1	29,2	238,2	369,9	2,2	172,0	782,3
80	17,7	47,0	37,1	84,7	83,0	7,0	0	62,4	44,8	53,4	92,1	5,4	70,1	209,8	69,4	190,3	539,6
81	199,4	16,6	45,6	75,5	106,2	63,0	0	7,1	105,7	237,9	12,6	94,6	310,6	227,3	75,1	356,2	969,2
82	52,8	7,5	33,0	58,3	26,7	19,9	23,2	26,5	195,4	136,6	54,3	111,3	171,6	118,0	69,6	386,3	745,5
83	108,7	77,1	126,6	106,4	50,0	85,3	1,1	4,8	101,6	33,3	33,5	56,7	242,5	283,0	91,2	168,4	785,1
1884	56,9	32,0	47,4	109,9	75,6	86,8	1,0	52,0	202,0	72,8	53,0	149,9	238,8	232,9	139,8	327,8	939,3

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
1885	205,4	58,4	68,9	171,7	40,4	31,6	3,2	40,6	49,4	129,1	140,7	15,0	278,8	281,0	75,4	319,2	954,4
86	150,6	84,1	34,6	88,4	38,3	31,5	13,3	7,5	36,7	89,7	55,8	170,0	404,7	161,3	52,3	182,2	800,5
87	108,0	47,0	83,5	72,1	41,3	29,8	30,1	29,5	186,5	101,9	121,0	152,0	307,0	196,9	89,4	409,4	1002,7
88	64,0	154,5	95,1	64,5	57,1	3,5	18,5	42,1	50,2	110,8	80,0	47,1	265,6	216,7	64,1	241,0	787,4
89	113,7	104,8	106,6	159,8	22,6	30,8	10,5	2,9	51,9	309,6	122,7	101,3	319,8	289,0	44,2	484,2	1137,2
90	39,5	19,8	171,5	68,7	84,7	30,8	36,5	2,1	48,9	120,4	151,2	83,1	147,4	324,9	69,4	320,5	862,2
91	196,6	0	58,5	58,1	47,7	102,1	0	20,0	57,4	144,4	68,4	71,6	268,2	164,3	122,1	270,2	824,8
92	142,6	129,2	109,5	94,5	32,6	5,5	6,4	24,9	118,4	119,4	68,9	118,7	390,5	236,6	36,8	306,7	970,6
93	36,7	69,4	0,1	0,7	43,8	17,1	113,1	44,2	0,7	18,0	272,6	60,2	166,3	44,6	174,4	291,3	676,6
1894	155,0	0,9	96,1	76,4	36,0	3,1	0	0	54,6	39,8	63,4	126,2	282,1	208,5	3,1	157,8	671,5
1895	134,1	114,8	84,8	65,4	70,0	87,3	0	0,3	5,8	158,3	80,6	130,1	379,0	220,2	87,6	244,7	931,5
96	15,2	43,0	37,3	109,0	70,4	14,9	1,7	79,7	22,1	328,6	139,4	163,4	221,6	216,7	96,3	490,1	1024,7
97	126,2	43,0	52,6	53,7	36,5	3,2	54,9	39,0	49,1	124,0	90,2	180,5	349,7	142,8	97,1	263,3	852,9
98	25,1	68,0	160,1	67,6	65,0	16,2	1,3	18,4	33,8	89,2	246,0	73,8	166,9	292,7	35,9	369,0	864,5
99	51,5	19,3	35,3	58,3	50,3	79,0	66,5	26,9	146,4	207,0	52,3	110,9	181,7	143,9	172,4	405,7	903,7
00	115,7	96,8	122,2	91,9	110,0	56,0	44,9	81,0	82,7	257,0	328,5	83,6	296,1	324,1	181,9	668,2	1470,3
01	17,7	136,0	121,8	25,1	96,7	36,9	6,0	8,5	225,5	147,5	49,3	184,4	338,1	243,6	51,4	422,3	1055,4
02	41,2	163,2	52,3	62,9	90,8	21,9	4,0	2,5	9,2	238,0	122,0	43,1	247,5	206,0	35,1	362,5	851,1
03	85,2	40,1	79,2	65,9	33,8	133,9	12,5	0	18,1	82,8	159,6	273,9	399,2	183,9	146,4	260,5	990,0
04	63,1	111,0	104,9	62,0	19,0	74,4	63,2	26,1	73,0	105,1	48,7	86,7	260,8	185,9	163,7	226,8	837,2
1905	60,6	134,5	71,4	82,9	134,2	98,1	37,8	41,2	35,5	63,4	259,5	26,0	221,1	288,5	177,1	358,4	1045,1
TOTALE 1825-1905	6427,9	5047,2	5524,8	5311,2	4589,1	3252,6	1462,8	2236,3	5807,2	9272,2	9180,3	7287,1	18762,2	15425,1	6959,0	24252,4	65398,7

R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio.

1873	62,3	106,2	34,8	107,9	33,2	14,5	0,1	0,5	72,5	266,8	94,2	8,7	177,2	175,9	15,1	433,5	801,7
74	43,3	45,7	31,7	101,8	107,6	0,6	32,4	15,1	104,8	99,0	141,0	149,1	243,1	241,1	48,1	344,8	877,1
75	53,3	72,0	161,6	90,6	1,6	107,7	19,1	17,3	123,9	302,2	144,6	71,2	196,5	253,3	144,1	570,7	1165,1
76	90,3	77,9	47,4	81,3	66,5	54,7	24,4	45,7	27,1	28,5	89,4	136,3	304,5	197,2	124,8	145,0	771,5
77	55,3	27,0	89,6	75,0	31,5	77,1	13,6	16,3	35,9	81,7	70,1	152,8	235,1	196,1	107,0	187,7	725,9
78	46,8	8,2	54,7	50,3	2,0	24,1	19,8	8,2	112,8	193,4	343,9	144,2	199,2	107,0	52,1	655,1	1013,4
79	77,8	120,4	53,5	204,1	152,6	0,9	0	1,6	46,1	97,0	54,2	22,6	220,8	410,2	2,5	197,3	830,8
80	22,6	45,2	42,5	85,8	92,2	9,6	0	59,5	43,5	60,1	92,7	8,2	76,0	220,5	69,1	196,3	561,9
81	183,4	22,7	50,8	65,8	102,2	67,4	0,2	11,8	102,1	240,4	10,0	94,1	300,2	218,5	79,4	352,5	950,9
1882	54,9	6,3	41,9	54,4	27,5	24,1	26,5	21,9	178,1	119,1	62,0	106,2	167,4	123,8	72,5	359,2	722,9
1883	116,9	77,2	134,3	102,5	51,1	99,5	2,5	9,7	110,6	35,3	35,8	56,5	250,6	287,9	111,7	181,7	831,9
84	54,5	31,6	57,0	118,5	76,1	89,1	2,0	45,6	212,3	77,3	53,9	135,3	221,4	251,6	136,7	343,5	953,2
85	185,5	57,8	66,3	155,4	36,6	31,4	6,1	47,2	46,5	180,2	137,2	18,4	261,7	258,3	84,7	318,9	918,6
86	155,6	83,0	29,9	92,5	34,9	29,8	11,2	12,4	46,1	102,5	44,5	169,6	413,2	157,3	53,4	193,1	817,0
87	111,4	43,8	83,4	73,9	43,1	28,5	37,9	28,5	179,6	95,6	143,3	148,8	304,0	205,4	94,9	418,5	1022,8
88	53,8	150,0	97,9	81,0	53,9	4,4	18,3	42,1	47,5	112,1	82,4	46,8	250,6	232,8	64,8	242,0	790,2
89	114,1	95,7	95,4	162,9	15,2	26,7	13,4	0,3	51,1	293,7	124,6	103,2	313,0	273,5	40,4	469,4	1096,3
90	41,5	23,5	182,5	75,6	86,2	32,0	30,8	3,4	55,1	113,5	158,6	90,3	155,3	344,3	66,2	327,2	893,0
91	174,7	0,1	56,3	53,3	42,5	91,3	1,1	12,2	56,1	136,7	55,4	59,0	233,3	152,1	104,6	248,2	738,7
1892	123,7	114,1	99,4	86,4	29,3	6,6	10,3	27,3	112,0	126,0	65,9	120,9	358,7	215,1	44,2	303,9	921,9
1893	34,1	63,0	0,5	2,4	44,3	18,0	112,9	34,3	4,1	20,8	252,5	62,6	164,7	47,2	165,2	277,4	654,5
94	120,4	1,5	89,4	76,2	40,3	4,6	0	0	48,1	40,4	63,0	105,2	227,1	205,9	4,6	151,5	589,1
95	131,6	99,6	73,9	59,1	61,1	85,1	0,1	1,7	0	147,0	75,0	120,7	351,9	194,1	87,2	222,0	855,2
96	13,3	36,5	37,4	104,1	83,4	13,7	5,0	71,1	15,2	333,2	134,6	183,6	183,4	224,9	90,4	483,0	981,1
97	129,0	40,7	48,9	49,4	37,8	5,7	53,3	37,4	46,3	134,8	80,0	166,5	333,2	136,1	101,4	260,6	894,3
98	63,4	22,1	158,3	68,8	57,9	9,6	4,6	19,8	30,1	98,4	225,1	75,7	161,2	285,0	34,0	353,6	833,8
99	49,2	17,1	36,5	52,0	58,6	82,3	60,8	27,9	143,3	175,2	46,9	102,0	168,3	147,1	171,0	365,4	851,8
00	110,2	93,7	118,0	86,6	115,9	48,5	50,3	74,3	80,0	205,8	254,9	81,6	285,5	321,3	173,1	540,7	1320,6
01	11,7	125,0	106,9	21,8	97,8	38,7	6,0	9,5	202,3	133,4	46,6	150,8	287,5	226,5	54,2	382,3	950,5
1902	41,4	152,2	44,4	65,1	83,6	32,0	7,4	0,3	8,8	239,9	108,9	45,6	239,2	198,1	39,7	357,6	834,6
1903	78,9	40,5	71,6	59,4	36,3	146,5	17,3	0	23,1	78,1	147,8	258,8	378,2	167,3	163,8	249,0	958,3
04	63,6	106,5	97,5	63,9	20,9	70,7	47,1	26,5	73,2	100,3	46,5	90,8	260,9	182,3	144,3	220,0	807,5
1905	60,7	126,9	66,6	79,1	147,5	84,9	39,4	43,7	30,7	64,8	241,1	27,6	215,2	293,2	168,0	336,6	1013,0

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus* (1). Nota di FEDERICO MILLOSEVICH, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Nella importante e numerosa collezione lasciata in dono dal prof. Domenico Lovisato al Museo di Mineralogia della R. Università di Sassari, sono molti e bei campioni provenienti dalle varie miniere del Sarrabus. In uno di essi destarono la mia attenzione alcuni cristalli poco appariscenti e mezzo nascosti fra una bella varietà di blenda di color colofonia, che costituisce il minerale più vistoso ed abbondante in detto campione; questi cristalli per il colore, per la forma e sopratutto per la caratteristica geminazione mi parvero a prima vista bournonite e mi affrettai a rendermene certo con la misura preliminare di qualche angolo. Il campione, secondo l'indicazione scritta dallo stesso prof. Lovisato, proviene dal filone di Canale Figu (livello n. 2). Canale Figu appartiene alla miniera Giovanni Bonu, seguendo verso Est il filone principale del Sarrabus e quindi si trova fra Giovanni Bonu e Nonte Narba.

Benchè si trovi spesso bournonite in giacimenti plumbo-argentiferi, tuttavia questo minerale non figura nell'elenco delle specie finora ritrovate al Sarrabus e non ne fanno menzione, nè gli scritti speciali di tanti valorosi mineralisti (2), nè la monografia descrittiva del Traverso (3).

In Sardegna fu fino ad ora rinvenuta bournonite, non in distinti cristalli, alla miniera dell'Argentiera nella Nurra e descritta recentemente dal Lovisato (4), il quale già da molti anni ne aveva constatata la presenza in parecchi campioni di questa miniera lasciati in dono al Museo di Sassari. Per quel che riguarda altre località italiane, ricorderò che Iervis (5) cita bournonite con galena a Gravere (Val di Susa), con tetraedrite a Ceresole Reale, con pirite e tetraedrite a Testa della Deserta e Sutore presso Noasca (Val di Locana), con calcopirite e galena ad Antey S. André (Val Tournanche), con pirite e calcopirite a Brosso, con galena all'Argentaria presso Pie-

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) Ho consultato in proposito le pubblicazioni su minerali del Sarrabus di Bombicci, Von Rath, Lovisato, Miers, Traverso, Artini, Corsi, D'Achiardi G., Mattirolo, Tacconi, De Castro.

(3) Traverso G. B., *Sarrabus e suoi minerali.* Alba, 1898.

(4) Lovisato D., *La bournonite nella miniera dell'Argentiera della Nurra (Portotorres, Sardegna).* Roma, Rend. Acc. Lincei (ser. 5), XI, 1902, 2° sem., pag. 357.

(5) Jervis G. I., *I tesori sotterranei dell'Italia.* Torino, I, 1873, pagg. 51, 73, 74, 105, 118 e II, 1874, pag. 350.

trasanta (Lucca). Ancora Iervis (1) e più recentemente La Valle (2) ricordano la bournonite fra i minerali dei giacimenti metalliferi dei Monti Peloritani a Fiumedinisi, a Francavilla di Sicilia e a Novara di Sicilia. Ma i soli cristalli di bournonite di località italiane finora conosciuti, sono quelli della ricordata miniera dell'Argentaria presso Pietrasanta, descritti da A. D'Achiardi (3) e che presentano la semplice combinazione }001{ }100{ }010{ }101{ }011{.

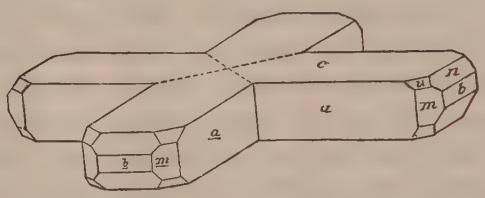
La bournonite di Canale Figu si presenta in cristalli di color nero ferro a lucentezza non troppo viva, di dimensioni variabili, ma generalmente piuttosto piccoli: i più lucenti e più adatti alle misure goniometriche sono quelli di abito spiccatamente tabulare ed hanno una lunghezza media di 3 mm. per una larghezza di 2 mm. ed uno spessore di circa 1 mm.

Le forme da me osservate sono, secondo l'orientazione comunemente adottata, le seguenti:

a }100{ $\infty \bar{P} \infty$.	*b* }010{ $\infty \breve{P} \infty$.	*c* }001{ *o* P.
m }110{ ∞ P.	*l* }320{ ∞ P $\frac{3}{2}$.	
n }011{ $\breve{P} \infty$.		
y }111{ P.	*u* }112{ $\frac{1}{2}$ P.	
ϱ }121{ 2 $\breve{P}$ 2.		

Le combinazioni osservate sono le seguenti:

1ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }011{, }112{ (fig. 1) che è la più frequente e si presenta in cristalli di abito tabulare secondo la base, allungati



nella direzione dell'asse [*y*]; in questi, dopo la base, ha maggior sviluppo il pinacoide }100{.

2ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }320{, }011{, }111{, }112{ di abito come la precedente con l'aggiunta di faccettine sempre molto piccole della piramide }111{ e del prisma }320{.

3ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }011{, }111{, }112{, }121{: anch'essa abbastanza frequente: con abito prismatico e con grande sviluppo oltrechè delle facce di }001{ e }100{ anche di quelle della zona [100] e specialmente

(1) Loc. cit., III, 1881, pagg. 204, 313, 315.

(2) La Valle G., *I giacimenti metalliferi di Sicilia in Provincia di Messina*. Messina, I, 1899, pag. 14 e II, 1904, pagg. 44 e 58.

(3) D'Achiardi A., *Mineralogia della Toscana*. Pisa, II, 1873, pag. 336.

del brachidoma }011{. In essa sono osservabili anche piccole faccettine della piramide }121{.

4ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }320{, }011{, }111{, }112{, }121{: come la 3ª, ma con l'aggiunta anche di }320{ ed è la più ricca di facce fra quelle osservate (fig. 2).

I cristalli sono tutti geminati secondo la comune legge: piano di geminazione una faccia del prisma }110{. Sono generalmente dei gruppi di 4 individui, che formano uno dei noti aggruppamenti cruciformi; ciò che vi ha di notevole, e che differisce questi aggruppamenti da altri consimili della bournonite di altre località, è il notevole sviluppo secondo l'asse [y] che

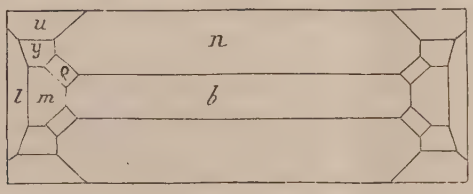


Fig. 2.

presenta ciascun individuo, in modo che le braccia della croce sporgono di molto e sono anche in qualche caso abbastanza regolarmente sviluppate: cosicchè il gruppo si accosta alla forma modello rappresentata nella fig. 1.

Frequente è un'associazione di più cristalli, che si può descrivere in tal modo: ad un individuo più grande si uniscono in posizione di gemello da un lato e dall'altro due più piccoli e in ciascuno degli angoli rientranti fra l'individuo maggiore e i due minori si dispone un altro individuo in posizione parallela al primo. Gruppi più complicati come il vero e proprio *Rädelerz* ungherese non si osservano; e neanche ho potuto constatare l'esistenza di lamelle di geminazione intercalate fra gli individui principali.

Per quanto riguarda l'aspetto fisico delle facce delle singole forme, si osserva che le facce del pinacoide }010{ sono piane, lucenti, perfette e che tali pure sono le facce di }011{ e di }112{ costantemente presenti e ben sviluppate: talora soltanto si osservano su }011{ e anche sulle facce contigue di }112{ delle striature dovute alla loro combinazione alternante. Le facce di }110{ hanno una lievissima striatura verticale; una simile striatura verticale è invece molto accentuata sul pinacoide }100{.

Molto interessante è l'osservazione dell'aspetto fisico delle facce di base, quale si rivela al microscopio anche con debole ingrandimento, e quale ho tentato di rappresentare, in modo alquanto schematico, nella fig. 3. Si notano in queste facce dei rilievi di contorno triangolare, formati da piccole piramidi triangolari troncate superiormente da un piano parallelo a quello basale; i

lati della base di queste piramidi sono paralleli agli spigoli di combinazione di (001) rispettivamente con (011), con (112) e con ($\bar{1}12$) e disposti in modo, che questi due ultimi lati sieno rivolti verso l'interno, e quindi paralleli alle linee di demarcazione fra gli individui geminati. Le facce di queste piccole piramidi molto probabilmente corrispondono rispettivamente alla (011) e a due facce di una protopiramide, forse la stessa }112{. Nella base degli individui gemelli si riscontrano analoghi rilievi con i lati paralleli ai medesimi spigoli di combinazione e quindi disposti rispetto ai primi in posizione di gemello.

La linea che limita gli individui geminati è una spezzata formata di tratti di varia lunghezza, ma sempre paralleli a un lato o ad un altro di

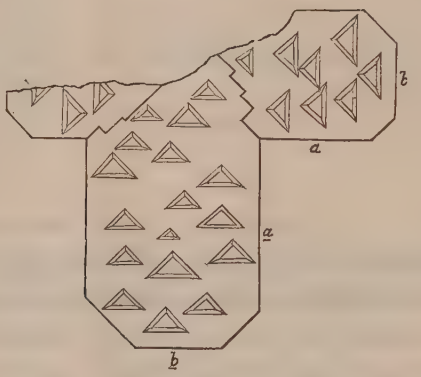


Fig. 3.

questi rilievi triangolari. La presenza di tali rilievi, collegata col fatto della marcata striatura verticale del pinacoide }100{, potrebbe far ritenere che la struttura dei singoli cristalli risulti costituita di lamelle verticali parallele a (010), che vanno decrescendo di estensione dall' esterno all' interno dei gruppi di cristalli associati, corrispondentemente al piano di giustapposizione dei geminati. Per di più la disposizione di tali rilievi non lascia alcun dubbio sulla costituzione dei semplici geminati a croce, che risulterebbero sempre formati di 4 individui a giustapposizione. E ciò concorda con i risultati delle osservazioni di Miers (1) e di Peck (2).

Da quanto ho detto riguardo l'aspetto fisico delle facce, risulta che le più adatte alle misure goniometriche sono quelle di }010{, di }011{, di }110{ e di }112{; le altre, o sono troppo piccole, o presentano irregolarità e striature. Da alcune misure esatte, eseguite sopra queste facce più perfette, mi

(1) Min. Soc. London, 1885, VI, 68.
(2) Zeitsch. f. Kryst. XXXII, 298.

risultarono costantemente dei valori un po' diversi da quelli teorici secondo le costanti di Miller, adattate dai principali trattati: infatti gli angoli (110):(010) e (011):(010) sono, secondo Miller, rispettivamente di 46° 50′ e di 48° 6′ 45″, mentre io da valori abbastanza prossimi fra di loro e sempre un po' superiori a questi ho trovato una media di 46° 57′ per (110):(010) e di 48° 12′ per (011):(010). Ciò mi ha indotto a calcolare il rapporto parametrico seguente:

$$a : b : c = 0{,}93415 : 1 : 0{,}89410$$

Quello di Miller è:

$$a : b : c = 0{,}93797 : 1 : 0{,}89686$$

Nel seguente quadro riporto il risultato delle misure e dei calcoli secondo le costanti da me ottenute e secondo quelle di Miller, e da esso si scorge che, se l'accordo fra osservazione e calcolo non è sempre assolutamente ottimo anche secondo le mie costanti, esso è tuttavia migliore di quello che si avrebbe adottando il rapporto parametrico di Miller.

Angoli	N.	Misurati		Calcolati (Millosevich)	Calcolati (Miller)
		Limiti	Medie		
(010) : (110)	8	46°53′ — 47° 4′	46°57′	—	46°50′
(010) : (011)	7	48 7 — 48 16	48 12	—	48 6 45″
(110) : (112)	4	56 47 — 56 53	56 49	56°47′	56 45
(011) : (112)	2	29 9 — 29 17	29 13	29 12	29 11 30
(112) : (1̄12)	1	—	47 10	47 12	47 8
(110) : (011)	3	62 56 — 63 7	63 1	62 56	62 49
(110) : (111)	2	37°18′ — 37 34	37 26	37 21 30″	37 20
(010) : (111)	1	—	57 0	57 8 30	57 3
(110) : (320)	2	11 0 — 11 20	11 10	11 7	11 9
(010) : (121)	1	—	37 58	37 44 30	37 39
(110) : (121)	1	—	31 40	31 53	31 50

Il confronto vale sopratutto per i primi sei angoli di questa tabella, quelli cioè ottenuti su facce adatte a buone misure.

La bournonite nel campione di Canale Figu si trova sopra una matrice di *quarzo* compatto e in minuti cristallini: essa è intimamente legata con *blenda* in cristalli color colofonia e in lamine brunastre; la accompagnano anche *argentite*, *argento nativo*, *pirite* e forse anche *tetraedrite*.

Geologia. — *Alcune osservazioni geologiche sul Vulcano Laziale e specialmente sul Monte Cavo.* Nota di Pompeo Moderni, presentata dal Socio T. Taramelli.

Fra i vulcani spenti dell'Italia centrale, il Vulcano Laziale è certamente quello al quale un maggior numero di studiosi rivolsero la loro attenzione e le loro osservazioni, scegliendolo a meta di scientifiche e piacevoli escursioni: la vicinanza sua a Roma e la facilità di accedervi da questa città per vie diverse; l'esistenza di molti e grossi centri abitati disseminati su tutta l'area dell'antico vulcano, i quali permettono di far stazione su qualunque settore di esso, e perciò di percorrerne con facilità ogni sua più recondita parte; l'aria salubre ed ossigenata dei Colli Laziali, ricoperti da ville, da splendidi vigneti e da folti boschi di castagni, sono tutti fattori che esercitarono il loro fascino su scienziati e *touristes*, e danno la ragione della numerosa schiera di coloro che si occuparono e scrissero del Vulcano Laziale.

Per quanto un campo sia stato ben mietuto, pur tuttavia qualche spiga resta sempre da cogliervi; lo studio di un vulcano spento, che ha avuto diversi periodi di attività, è così complesso, che, frugando bene, si trova sempre qualche cosa non veduta o dimenticata dagli altri.

Come è noto, il Vulcano Laziale ha avuto tre periodi differenti indicati, il 1° dalla cinta craterica esterna dell'Artemisio, il 2° dalla cinta craterica interna del Monte Faete ed il 3° dai crateri eccentrici di Albano, Nemi e Valle Ariccia. Ognuno di questi edifici principali è accompagnato da un certo numero di edifici minori o coni avventizi, formatisi il più delle volte fra una conflagrazione e l'altra dell'edificio principale, ovvero rappresentano la continuazione, in proporzioni ridotte, dell'attività di quello.

Lo studio particolareggiato di tutte le boche eruttive, comprendente la loro ricostruzione, la cronologia delle loro eruzioni, il riconoscimento delle colate di lava ed altri materiali caratteristici appartenenti rispettivamente ad ognuna d'esse, è quello che offre ancora il campo sul quale vi è più possibilità di trovare delle spighe da raccogliere.

È vero che vi è chi crede che a questo studio non si debba dare soverchia importanza, ma è un'opinione questa che non ha serio fondamento, poichè nello studio complesso di un vulcano spento, quello delle bocche eruttive è per lo appunto il più importante di tutti: infatti, se lo studio analitico dei materiali eruttati fa conoscere le loro varietà; se lo studio stratigrafico con l'ammasso dei prodotti, dà un'idea della durata del vulcanismo in una data regione; con le intercluse erosioni, indica appossimativamente

il tempo più o meno lungo trascorso tra un'eruzione e l'altra; con la diversità dei prodotti sovrapposti, avverte della possibilità di più fasi distinte dell'attività del vulcano; soltanto lo studio attento ed accurato delle bocche eruttive permette di riconoscere la provenienza di tutti i materiali eruttati, ed integrando tutte le altre osservazioni, offre una base per la ricostruzione a grandi linee della storia di un vulcano.

***

Dopo un'ultima conflagrazione, sventratosi ad Ovest il primitivo cono del Vulcano Laziale, del quale, come si è detto, resta la catena dell'Artemisio a segnarne la parte orientale, ed i colli di Rocca Priora quella settentrionale, ebbe termine il primo periodo dell'edificio principale.

Quasi nel mezzo del primitivo grandioso cratere, indicato dalla Valle della Molara, sorse gradatamente un secondo cono, di dimensioni assai più modeste, a segnare un secondo periodo nella storia di questo vulcano, così come in tempi storici si è visto sorgere ed ingrandire il cono del Vesuvio nel mezzo dello squarciato cratere del Somma. Anche il secondo periodo ebbe termine con lo slabbramento della parte occidentale di cinta craterica del secondo edificio vulcanico, del quale la catena del Monte Faete, la cui punta più elevata raggiunge la quota di m. 956 sul livello del mare, rappresenta ancora la parte orientale del recinto craterico.

Prima che il condotto eruttivo si spostasse verso Sud-Ovest originando i crateri di Nemi, di Albano e di Valle Ariccia, i quali segnarono le manifestazioni del terzo periodo, entro lo slabbrato cratere del secondo periodo, indicato dall'altipiano circolare che porta il nome di *Campi d'Annibale*, cominciò a formarsi un terzo cono, indicato oggi dalla collinetta chiamata Colle del Vescovo, avente una cinquantina di metri d'altezza, il quale rimase però quasi allo stato embrionale, perchè tutta l'attività eruttiva del vulcano si concentrò in altri due punti poco distanti: questi due punti sono il Monte Jano, conosciuto più comunemente nella regione con il nome di Monte Pila, ed il Monte Cavo, i quali da semplici fumarole situate su l'orlo craterico, come probabilmente dovevano essere in principio, vennero gradatamente attivandosi supplantando la bocca principale. Per quanto a questi due edifici convenga il nome di bocche avventizie, pur tuttavia rappresentano un'appendice e un'appendice importante del secondo periodo, poichè con il Colle del Vescovo estintasi la bocca principale, per i due coni del Monte Jano e di Monte Cavo, continuarono ancora per qualche tempo le manifestazioni eruttive del secondo periodo.

I due coni, dei quali il Monte Jano raggiunge la quota di 938 metri sul mare ed il Monte Cavo quella di 949 metri, sono contemporanei, all'incirca della stessa grandezza e costituiti da materiali identici; si svilupparono rispettivamente alle due estremità della catena di Monte Faete che alta e

dirupata s'innalza su i Campi d'Annibale, mostrando le testate degli strati fortemente inclinate all'esterno, e rappresenta ancora caratteristicamente una quarta parte, circa, dell'intera cinta craterica.

Nel Monte Jano tutti riconobbero un cono avventizio dell'edificio vulcanico del secondo periodo: è costituito da banchi di lapilli e scorie di color rosso e bruno, da ogni parte fortemente rialzati (1) verso la sommità su la quale si riconosce ancora il piccolo cratere, malgrado il folto bosco che riveste tutto il colle. Un mantello di lava scoriacea giallastra, detta *Sperone*, ricopre quasi interamente i fianchi del cono: di questa bocca eruttiva si hanno descrizioni particolareggiate della sua forma, del posto che gli spetta nell'ordine cronologico delle eruzioni laziali, nonchè dei materiali eruttati.

Fra quelli che più recentemente scrissero del Vulcano Laziale, sono da citare il Sabatini ed il Verri: il primo considera il Monte Cavo come la continuazione del Monte Faete e come quello crede che rappresenti una parte (quella Sud-Ovest) della cinta craterica del secondo periodo (2). Il Verri invece lo ritiene un cono avventizio e così lo descrive:

« Il Monte Cavo con prodotti eguali a quelli del Monte Jano, posto sulla linea dei crateri terminali del cono antico e del cono centrale, sorgente pur esso sulla piattaforma rimasta dopo il diroccamento del cratere che vomitò le lave ricche di leuciti ed augiti, incastrato tra i ruderi del recinto di quel cratere nel punto dove il cono centrale deve essersi squarciato per versare i peperini nel settore Ovest, segna *altro cono eruttivo* » (3).

Il Monte Cavo è infatti un cono vulcanico e dalla forma così caratteristica che lo si giudica tale anche a distanza, senza bisogno di recarsi sul posto ad esaminarne la struttura e i materiali che lo compongono. Anzitutto il profilo del Monte Cavo si distacca dalla linea generale del cono principale del secondo periodo, sicchè avvicinandosi ad esso l'osservatore si conferma sempre più nel convincimento che il Monte Cavo sia un cono sviluppatosi su l'orlo dello slabbrato cono interno. Giunto poi sul posto, dovunque l'osservatore volge lo squardo, trova elementi che provano essere il Monte Cavo una bocca eruttiva distinta e posteriore al cono interno, sviluppatasi durante il secondo periodo del Vulcano Laziale.

La prova che si offre più evidente è quella del forte e caratteristico rialzamento degli strati da tutte le parti verso la sommità del Monte Cavo:

(1) La parola *rialzati* presa alla lettera non è esatta, perchè infatti nelle formazioni vulcaniche non si tratta di strati *rialzati o sollevati* dalla loro primitiva giacitura in un'altra; però la medesima è generalmente usata indicando assai efficacemente un fatto, la descrizione del quale richiederebbe altrimenti un lungo giro di parole.

(2) Sabatini V., *I Vulcani dell'Italia centrale e i loro prodotti*. Parte I. *Vulcano Laziale*. Memorie descrittive della Carta Geologica d'Italia, Vol. X, Roma, 1900.

(3) Verri A., *Note per la storia del Vulcano Laziale (gruppo dei crateri)*. Bollettino della Società Geologica Italiana, Vol. XII, Roma, 1893.

tale rialzamento si vede specialmente bene su la strada che dalla piazza Regina Margherita di Rocca di Papa conduce al viale della Madonna del Tufo. Oltre a ciò nel fondo di alcune grotte esistenti lungo questa strada di circonvallazione e non molto distanti dalla piazza, al disotto degli strati di lapilli appartenenti alle eruzioni del Monte Cavo, si scoprono lave e scorie del cono principale, macroscopicamente alquanto diverse e quel che più monta diversamente inclinate dalle prime.

Su la mulattiera che dal viale della Madonna del Tufo sale ai Campi d'Annibale, rasentando il villino De Rossi, l'erosione ha messo in luce delle lave estremamente leucitiche, anzi che si possono chiamare un ammasso di leuciti tenute assieme da poco magma lavico, del tutto eguali a quelle delle colate di cui si vedono le testate nell'interno del Monte Faete. Queste lave molto alterate, dallo aspetto antico, così diverse dalle lave esistenti su i fianchi del Monte Cavo, povere di leuciti in cristalli macroscopici e che sembrano assai meno antiche, sono un'altra prova che si è di fronte a prodotti di due fasi diverse, nello stesso tempo che il Monte Cavo, per i suoi materiali che si sovrappongono a quelli del Monte Faete, dimostra di essere di questo più recente.

Su la strada che dai Campi d'Annibale, seguendo più o meno l'antica strada romana, sale alla sommità del Monte Cavo, si vedono le colate di lava e gli strati di lapilli fortemente rialzati verso quella sommità e non verso un punto imaginario al disopra della parte centrale dei Campi d'Annibale; osservazione identica si può fare lungo il viale che conduce alla Madonna del Tufo. Dove però l'osservatore può constatare un fatto che fa sparire ogni dubbio su la genesi del Monte Cavo, è nell'interno stesso del cratere del secondo periodo: su la mulattiera che da Rocca di Papa, attraversati i Campi d'Annibale, passando nella sella che separa, non accidentalmente, il Monte Faete dal Monte Cavo, scende a Nemi, al disotto del Monte Cavo stesso vi sono strati di lapillo fortemente rialzati verso la cima del monte. Se nell'interno del cratere questo monte invece di mostrare le testate degli strati inclinate verso l'esterno, come si osservano appunto nell'attiguo Monte Faete, mostra invece i medesimi inclinati all'interno, mentre da tutte le altre parti si vedono sempre egualmente rialzati verso la sommità del monte, è segno evidente che al Monte Faete trattasi di un frammento di cinta craterica ed al Monte Cavo invece di un cono ben distinto e riconoscibile. Anzi dalle osservazioni che si possono fare nell'accennata località e meno chiaramente in qualche altra, sembrerebbe che al posto del Monte Cavo dovesse sorgere un cono di maggior altezza, il quale come avviene sovente, demolito in qualche più forte conflagrazione, siasi poi riformato di dimensioni minori, quali oggi noi le vediamo.

Percorrendo il delizioso viale che da Rocca di Papa conduce alla Madonna del Tufo, più volte nominato, in prossimità del paese si osservano

degli strati di lapillo la cui convessità è rivolta in senso opposto a quella di altri strati che si possono vedere poco prima di giungere alla chiesa, come se fossero le due parti opposte di uno stesso cono. Nella parte più bassa della mulattiera che dai Campi d'Annibale conduce su la vetta del Monte Cavo, si vedono degli strati rialzati verso Ovest: queste due osservazioni unite insieme, le quali ci mostrerebbero tre parti diverse della superficie dello stesso cono, farebbero supporre che a Nord dell'attuale cono di Monte Cavo, ne esistesse antecedentemente uno più piccolo, il quale per uno spostamento verso Sud del canale eruttivo, sarebbe rimasto in parte distrutto ed in parte incluso nel posteriore e maggiore cono del Monte Cavo.

Potrebbe anche darsi che questi due ultimi fatti fossero indipendenti l'uno dall'altro e che le due parti opposte di cono, che sembrano vedersi lungo il viale della Madonna del Tufo, siano veramente le rovine di un piccolo conetto il quale segnerebbe una prima fase del Monte Cavo. L'altro fatto invece che si osserva su la parte più bassa della mulattiera che dai Campi d'Annibale ascende a Monte Cavo, potrebbe anche essere un altro dato riferentesi al cono maggiore più sopra accennato, che avrebbe segnato una seconda fase di questa bocca eruttiva, la quale nella terza fase poi, rappresentata dall'attuale Monte Cavo, sarebbesi spenta.

Non insisto molto su la interpretazione da me data agli avanzi di questa bocca eruttiva, poichè la medesima essendo per la massima parte coperta da folto bosco, non da per tutto si possono fare le osservazioni che sarebbero necessarie; però della medesima si può affermare che fra le bocche secondarie è una delle più grandi ed interessanti, facilmente riconoscibile non solo, ma dal suo buono stato di conservazione, è permesso anche farsi la convinzione che deve avere avuto varie fasi, le quali ne hanno replicatamente modificato le dimensioni.

La spianata che corona la sommità del Monte Cavo rappresenta certamente il piccolo cratere di questo cono, ma la superficie essendo stata qui troppe volte modificata dalle mani dell'uomo, spiega facilmente il perchè del cratere non rimanga più alcuna traccia.

Tutte le bocche avventizie situate fra il recinto esterno ed il cono centrale furono dal Sabatini [1]) classificate come manifestazioni eccentriche appartenenti al secondo periodo; anche il Verri [2]) attribuisce i coni avventizi della Val Molara al secondo periodo. Fra quelli però che si trovano dalla parte opposta, cioè a Sud e Sud-Est del cono centrale, i due conetti gemelli situati poco lontano l'uno dall'altro, rispettivamente a Nord ed Est della Fontana Tempesta, si devono logicamente comprendere fra i coni avventizi del terzo periodo.

(1) Sabatini V., op. cit.
(2) Verri A., op. cit.

Queste due piccole bocche eruttive si trovano, è vero, ai piedi del cono centrale ma vi è da osservare ch'esse si trovano anche presso l'orlo craterico di Nemi non solo, ma da quella situata ad Est di Fontana Tempesta è uscita un'abbondante colata di lava che si è precipitata nella conca lacustre, come dimostra la sua direzione e la sua inclinazione, e vedesi per oltre un chilometro, dai piedi del conetto fino a Nemi; mentre all'altro piccolo edificio vulcanico, situato a Nord di Fontana Tempesta, appartiene forse la lava che, a Sud di esso, si vede sul fianco del recinto craterico di Nemi. Se dunque le lave di queste due bocche avventizie, e più specialmente di quella situata ad Est di Fontana Tempesta, si sono rovesciate nella conca craterica di Nemi, è segno evidente che questa preesisteva, ed i due conetti sviluppatisi sul di lei orlo devono considerarsi come bocche avventizie del cratere di Nemi anzichè del cono centrale e perciò da comprendersi fra le manifestazioni vulniche del terzo periodo e non del secondo.

Chiuderò questa breve Nota con alcune osservazioni su i Peperini, le quali se non potranno vantare il pregio della novità, varranno almeno a confermare sempre più quelle fatte da altri geologi: su la strada rotabile che da Rocca di Papa scende ad Ariccia, poco dopo aver oltrepassato il santuario della Madonna del Tufo, s'incontrano banchi di Peperino fortemente rialzati verso i Campi d'Annibale, banchi che furono rimarcati anche dal Verri (1). Nel bosco, fra il lago di Albano ed il tratto di strada rotabile che passa davanti al suaccennato Santuario, svolgendosi sul fianco Sud-Ovest del cono centrale, la superficie è essenzialmente costituita da Peperino i di cui strati sono pure fortemente rialzati verso i Campi d'Annibale: questo Peperino, al pari di quello di Albano e Nemi, contiene incastrati nella sua pasta tufacea grossi blocchi di calcare bianco di cui se ne trovano pure molti isolati sparsi per il bosco. Agli Squarciarelli, alla base Nord-Ovest del cono centrale, intercalati ad altri materiali vulcanici vi sono banchi di Peperino rialzati pure verso i Campi d'Annibale, come rialzato da questa parte è il Peperino che nel Vallone Arcioni raggiunge, secondo il Verri, la quota di 600 metri sul mare.

Il Di Tucci ha trovato dei Peperini in Val Molara al piede del piccolo cono avventizio di Monte Pennolo, nel vallone Barbarossa (versante Sud del cono centrale) ad 850 metri di elevazione e su la vetta stessa del Monte Cavo; altro Peperino affiora ai Campi d'Annibale e lungo la mulattiera che, scendendo per il versante Nord del cono centrale, conduce a Rocca Priora. Questi Peperini che si trovano su tutti i versanti del cono centrale devono, evidentemente, essersi formati con i materiali proiettati dalle eruzioni del cono stesso e da quelle delle sue bocche avventizie; perciò non devono confondersi con il Peperino dovuto alle eruzioni dei crateri di Albano e Nemi,

(1) Verri A., op. cit.

Peperino i cui strati rialzati rispettivamente verso quelle bocche eruttive, chiaramente ne indicano la provenienza: l'inclinazione varia dei Peperini vedesi in molte località fra le quali citerò la parte inferiore della già nominata strada che da Rocca di Papa scende ad Ariccia, dove i medesimi che poco più in alto erano rialzati fortemente verso i Campi d'Annibale, si vedono ora più ora meno accentuatamente rialzati verso la conca craterica di Albano o verso quella di Nemi.

Inoltre il Verri cita l'esistenza del Peperino nelle conche crateriche di Pratoporci e di Pantano Secco, alle falde settentrionali del primitivo grande cono esterno del sistema laziale; il Meli [1] a sua volta ha trovato il Peperino alla Fonte del Pilozzo sotto Monte Porzio ed ai piedi della collina del Tuscolo presso Frascati, località anche queste sul versante settentrionale del grande cono esterno; altro Peperino ha trovato il Meli presso Civita-Lavinia e nella Valle di S. Gennaro fra questo paese e Velletri, sul fianco meridionale del grande cono esterno; altro Peperino il Verri ed il Meli, per tacere di altri, citano in diversi punti alle falde occidentali dello stesso grande cono esterno.

Però se per i Peperini che si trovano su questo ultimo versante citato del cono esterno, è difficile distinguere quelli formatisi con i materiali dovuti alle eruzioni di questa grande bocca da quelli del terzo periodo, cioè formatisi con i materiali eruttati dai crateri di Albano e Nemi, apertisi più tardi da questa parte su l'orlo craterico della medesima, per i Peperini che si trovano su i versanti settentrionale e meridionale del cono esterno tale dubbio non è possibile, e perciò si devono ritenere formati con i materiali proiettati dal grande cratere contenuto in esso cono.

Vi è chi ha espresso l'opinione che il Peperino notato dal Meli alla Fonte del Pilozzo sotto Monte Porzio, possa essere un prodotto locale di quel conetto avventizio: ammesso pure che l'osservazione sia esatta, di fronte al fatto dell'esistenza del Peperino a Frascati, a Civita-Lavinia e nella Valle di S. Gennaro, il quale dimostra che in ogni parte del cono esterno, come in ogni parte di quello interno o centrale si trova del Peperino, si è obbligati a ben altre conclusioni. Il Meli osserva inoltre, molto opportunamente, che strati di Peperino devono giacere ancora inavvertiti in molti altri luoghi, perchè ricoperti dal terreno vegetale, o dai detriti moderni trasportati dalle acque, non appariscono od affiorano soltanto in qualche punto, come hanno recentemente dimostrato le trincee tagliate nel terreno per la ferrovia dei Castelli Romani.

Questi fatti conducono necessariamente a concludere che nel Vulcano Laziale il Peperino non è prodotto speciale del suo terzo periodo, cioè dei

[1] Meli R., *Sopra i resti fossili di un grande avvoltoio (Gyps) racchiuso nei Peperini laziali*. Boll. della Soc. geolog. ital., vol. XVIII, fasc. 3°, Roma, 1889.

crateri di Albano e Nemi, ma che Peperino si è formato in tutti e tre i periodi di esso vulcano, come lo attestano gli strati di questa roccia che si rinvengono tanto nell'ossatura del cono esterno quanto in quella del cono centrale od interno. I Peperini dei due primi periodi sono meno visibili, meno conosciuti e meno studiati, 1° perchè da quanto si vede sembra ch'essi non siano così potenti come quelli del terzo periodo; 2° perchè sono rimasti seppelliti sotto le deiezioni di eruzioni succedutesi durante i tre periodi del vulcano.

Dal resto anche il Vulcano di Montefiascone, il quale è uno dei quattro che costituiscono il gruppo dei Vulsini (1) presenta la specialità di aver emesso in tutte le sue fasi dei materiali, con i quali si formò un Peperino, anzi questa è una delle caratteristiche che lo distingue degli altri tre vulcani del gruppo; sicchè la formazione del Peperino durante i diversi periodi di un vulcano non sarebbe un fatto verificatosi soltanto al Vulcano Laziale, ma come vedesi, ve ne sono già due esempi fra i vulcani stessi dell'Italia centrale. Anche i Peperini di Montefiascone e del Cimino contengono degl'inclusi, che sono però diversi da quelli del Vulcano Laziale; così, tanto a Montefiascone ed al Cimino come al Laziale, vi è del Peperino più fortemente cementato e di quello che lo è in grado minore. Queste accidentalità, che si spiegano assai facilmente, non hanno importanza alcuna per quanto riguarda la genesi della roccia, che è identica a quella degli altri tufi vulcanici, ma la dividono in diverse specie più o meno atte ad essere impiegate nelle costruzioni.

Chimica. — *Sulle forme superiori di combinazione dell'argento.* Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. de Helguero. *Per la risoluzione delle curve dimorfiche.* Pres. dal Socio Volterra.

V. C

(1) Moderni P., *Contribuzione allo studio geologico dei Vulcani Vulsini.* Boll. del R. Comitato Geologico, annate 1903 e 1904, Roma, 1904.